Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für theoretische Informatik
Dr. B. Gärtner, Dr. R. Jacob und M. Hoffmann

30. März 2004

Algorithmische Geometrie — Serie 1 — SS04

URL: `http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/CG04/`

Allgemeine Hinweise

Auf jeder Übungsserie gibt es eine Aufgabe, die schriftlich zu bearbeiten und zum angegebenen Termin – meist in der Woche darauf – abzugeben ist. Gruppenabgabe wie auch das Einreichen identischer Lösungen sind nicht zulässig. Unter den Aufgaben werden auch einige Programmieraufgaben (in C++) sein, jedoch keine aufwändigen Projekte, sondern eher kleinere Anpassungen an vorgegebenen Programmgerüsten.

Testatbedingungen

Am Ende der Übungen wird ein Testat vergeben. Das Testat erhält, wer

1. die schriftlichen Aufgaben von **allen bis auf zwei** Übungsserien **sinnvoll**, **vollständig und selbständig** bearbeitet, *sowie*
2. im Verlaufe des Semesters mindestens **drei Aufgaben** in der Übungsstunde an der Tafel **vorrechnet**.

Prüfung

Das Übungstestat ist Voraussetzung für die Zulassung zur mündlichen Prüfung (15 min.). Massgeblich für die Benotung ist allein die Prüfungsleistung.

Aufgabe 1

Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^d$ heisst *sternförmig* (star-shaped) $\iff$ es gibt einen Punkt $c \in S$, so dass für jeden Punkt $p \in S$ das Liniensegment $\overline{cp}$ in S liegt.

Wir betrachten im folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Beweise oder widerlege:

a) Eine sternförmige Menge ist konvex.

b) Eine konvexe Menge ist sternförmig.

c) Der Schnitt zweier konvexer Mengen ist konvex.

d) Die Vereinigung zweier konvexer Mengen ist konvex.

e) Der Schnitt zweier sternförmiger Mengen ist sternförmig.

f) Der Schnitt einer konvexen mit einer sternförmigen Menge ist sternförmig.

Bitte wenden!

Aufgabe 2

Gegeben eine Menge $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ von $n \geq 3$ Punkten im $\mathbb{R}^2$, sowie ein weiterer Punkt $q \in \mathrm{conv}(P)$. Beweise, dass es drei Punkte p_i, p_j und p_k, $1 \leq i, j, k \leq n$, gibt, so dass $q \in \mathrm{conv}(\{p_i, p_j, p_k\})$.

Aufgabe 3

Betrachte drei Punkte $p, q, r \in \mathbb{R}^2$, gegeben durch ihre Cartesischen Koordinaten $p = (p_x, p_y)$, $q = (q_x, q_y)$ und $r = (r_x, r_y)$. Zeige: das Vorzeichen der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix}$$

bestimmt, ob r links, rechts oder auf der gerichteten Gerade durch p und q liegt.

Aufgabe 4 (∗)

Gegeben ein konvexes Polygon $P \subset \mathbb{R}^2$ als Feld (array) `p[0]...p[n]` seiner $n + 1$ Eckpunkte (vertices) im Gegenuhrzeigersinn. Beschreibe einen möglichst effizienten Algorithmus, um festzustellen, ob ein Punkt q innerhalb, ausserhalb oder auf dem Rand von P liegt.

Abgabe: Aufgabe 4 schriftlich, am 6. April 2004 in der Vorlesung.