Institut für theoretische Informatik
Dr. B. Gärtner, Dr. R. Jacob und M. Hoffmann

15. Juni 2004

Algorithmische Geometrie — Serie 12 — SS04

URL: http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/CG04/

Aufgabe 39

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge von n Punkten im d-dimensionalen Raum. $D(P) \in \mathbb{R}$ sei der Abstand von $\operatorname{conv}(P)$ zum Ursprung. (Es gilt also $D(P) = 0$ genau dann wenn $\mathbf{0} \in \operatorname{conv}(P)$). Beweise oder widerlege die folgende Behauptung:

Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, die nicht von n oder d abhängt, mit der folgenden Eigenschaft: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Teilmenge $S \subseteq P$ mit Grösse höchstens $f(\varepsilon)$ und der Eigenschaft, dass $D(S) \leq (1+\varepsilon)D(P)$ gilt.

Aufgabe 40 (*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Punktmenge im d-dimensionalen Raum, $|P| = n$.

a) Gib einen Algorithmus an, der in Zeit $O(dn)$ einen Ball findet, der P enthält und dessen Radius höchstens doppelt so gross ist wie der Radius des kleinsten umschliessenden Balles von P.

b) Angenommen, wir kennen zwei Punkte $p, q \in P$, die den *Durchmesser* von P bestimmen, d.h.

$$\|p - q\| = \max\left\{ \|p' - q'\| \;\middle|\; p', q' \in P \right\}.$$

Gib einen Algorithmus an, der in Zeit $O(d)$ einen Ball findet, der P enthält und dessen Radius höchstens $\sqrt{3}$ mal so gross ist wie der Radius des kleinsten umschliessenden Balles von P.

Aufgabe 41

Gegeben sei die Punktmenge $P = \{e_1, \ldots, e_d\} \subseteq \mathbb{R}^d$, wobei die j-te Koordinate von e_i durch

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

gegeben ist, $j = 1, \ldots, d$. Sei $S \subseteq P$ und betrachte den Mittelpunkt c_S des kleinsten umschliessenden Balls $K(S)$ von S. Was ist der Radius des kleinsten Balles mit Mittelpunkt c_S, der P enthält? Wie gross muss S sein, damit dieser Radius höchstens $(1+\varepsilon)$-mal so gross ist wie der Radius von $K(P)$?

Abgabe: Aufgabe 40 schriftlich, am 22. Juni 2004 in der Vorlesung.