Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für theoretische Informatik
Dr. B. Gärtner, Dr. R. Jacob und M. Hoffmann

13. April 2004

Algorithmische Geometrie — Serie 3 — SS04

URL: `http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/CG04/`

Aufgabe 8

Betrachte vier paarweise verschiedene Punkte $p, q, r, s \in \mathbb{R}^2$, gegeben durch ihre Cartesischen Koordinaten $p = (p_x, p_y)$, $q = (q_x, q_y)$, $r = (r_x, r_y)$, und $s = (s_x, s_y)$.

Zeige: Das Vorzeichen der Determinante

$$\begin{vmatrix} p_x & p_y & {p_x}^2 + {p_y}^2 & 1 \\ q_x & q_y & {q_x}^2 + {q_y}^2 & 1 \\ r_x & r_y & {r_x}^2 + {r_y}^2 & 1 \\ s_x & s_y & {s_x}^2 + {s_y}^2 & 1 \end{vmatrix}$$

bestimmt, ob s innerhalb, ausserhalb oder auf dem Kreis durch p, q und r liegt. Was passiert, wenn p, q und r auf einer Geraden liegen?

Aufgabe 9

Wieviele Triangulierungen hat ein konvexes Polygon im $\mathbb{R}^2$ auf $n \geq 3$ Ecken?

Aufgabe 10

Liegen in einer endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ keine vier Punkte auf einem Kreis, so erhält man die eindeutige Delaunay-Triangulierung als Projektion der unteren konvexen Hülle der unter $(x, y) \mapsto (x, y, x^2+y^2)$ gelifteten Punktemenge. Was bedeutet die Projektion der oberen konvexen Hülle? Gib eine Charakterisierung in der Ebene!

Aufgabe 11 (∗)

Der Euclidean minimum spanning tree (EMST) einer endlichen Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Spannbaum, für den die Summe der Kantenlängen minimal ist (unter allen Spannbäumen von M). Zeige:

a) Jeder EMST von M enthält ein closest pair, d.h. eine Kante zwischen zwei Punkten $p, q \in M$, die minimalen Abstand zueinander haben unter allen Punktepaaren aus $\binom{M}{2}$.

b) Jede Delaunay Triangulierung von M enthält einen EMST von M.

Abgabe: Aufgabe 11 schriftlich, am 20. April 2004 in der Vorlesung.