Die Vermutung von Mersenne

Mersenne (1644): *Die Zahlen der Form* $2^n - 1$ *sind prim für*

$$n = \mathbf{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19}, 31, 67, 127, 257$$

und nicht prim für alle anderen $n < 257$.

n	$2^n - 1$	prim?	Faktorisierung
2	3	ja	
3	7	ja	
4	15	nein	$3 \cdot 5$
5	31	ja	
⋮	⋮	⋮	
11	2047	nein	$23 \cdot 89$
⋮	⋮	⋮	
19	524287	ja	

Euler (1750):

31	2147483647	ja	

Lucas (1876):

67	147573952589676412927	**nein**	???

Der Vortrag von Frank Cole

(AMS-Meeting 1903)

0	1	·	2
1	2	·	2
2	4	·	2
3	8	·	2
⋮	⋮	·	2
66	73786976294838206464	·	2
67	147573952589676412928	−	1
	147573952589676412927		

$$
\begin{array}{l}
761838257287 \cdot 193707721 \\
\hline
761838257287 \\
6856544315583 \\
2285514771861 \\
5332867801009 \\
5332867801009 \\
5332867801009 \\
1523676514574 \\
761838257287 \\
\hline
147573952589676412927
\end{array}
$$

3 Jahre Sonntagsarbeit: standing ovations!

Mersenne-Zahlen heute

Die fünf Fehler von Mersenne:

$$61+, 89+, 107+, 67-, 257-$$

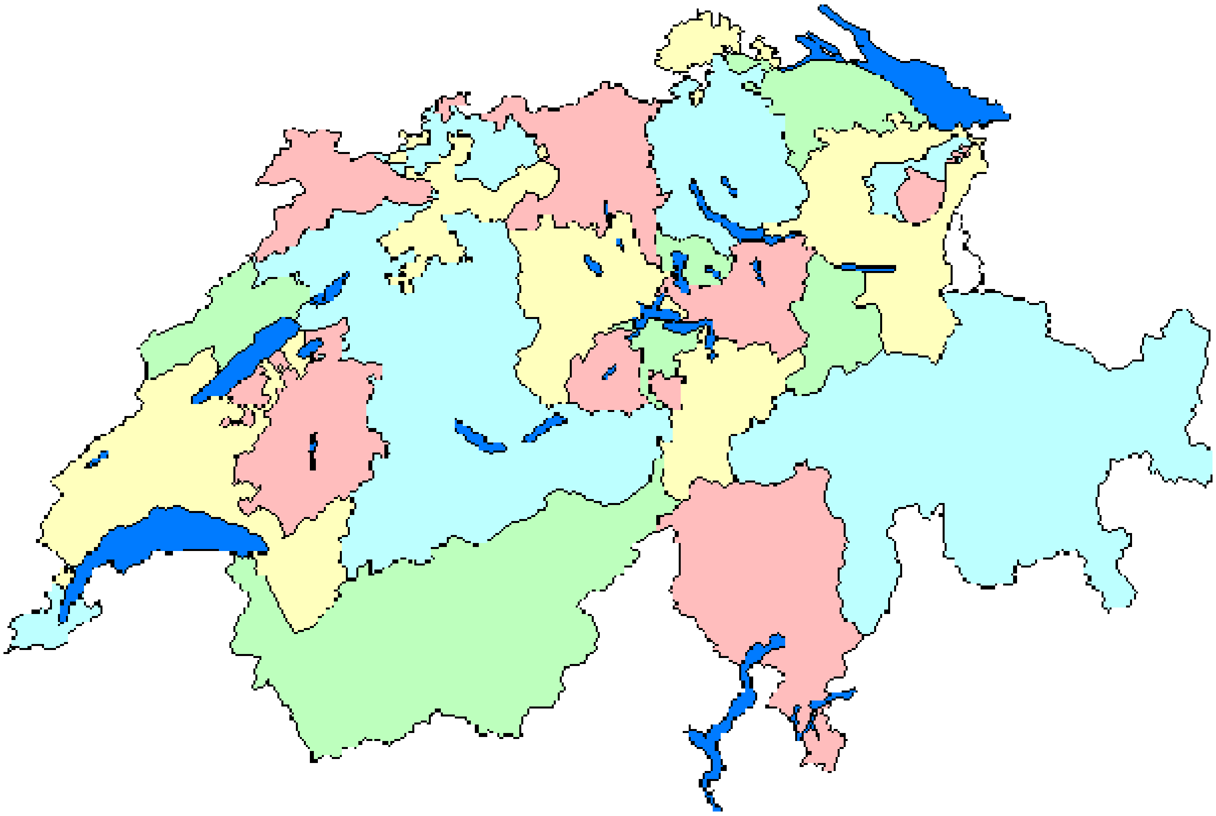
(leicht auf jedem PC verifizierbar)

GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search):

- 41 Primzahlen der Form $2^n - 1$ bekannt
- grösste Primzahl: $2^{24{,}036{,}583} - 1$ (5/2004)
- Faktor von $2^{971} - 1$ gefunden (9/2004)
- Sie können mitmachen!

Das 4-Farben-Problem

Guthrie (1852): *Kann jede Landkarte so mit 4 Farben gefärbt werden, dass benachbarte Länder verschiedene Farben erhalten?*



Kempe (1879), Tait (1880): falsche Beweise

Birkhoff/Franklin (1922): ok für ≤ 25 Länder

Der erste Computerbeweis

Appel/Harken (1976): Jede Landkarte ist mit 4 Farben färbbar.

- 1476 Konfigurationen, deren Vorkommen in der Landkarte zu einem reduzierten Problem führt (Fallunterscheidungen per Computer)

- Jede Landkarte, die nicht 4-färbbar ist, enthält eine der 1476 Konfigurationen (Beweis per Hand möglich, dauert Monate)

Robertson/Sanders/Thomas (1996): Reduktion auf 633 Konfigurationen

Computereinsatz heute

- Computer ist unverzichtbar als Werkzeug (z.B. schnelles Testen von Vermutungen – siehe Mersenne)

- Computerbeweise sind akzeptiert (manuelle Beweise enthalten auch Fehler!)

. . . aber

wir brauchen gute Software!