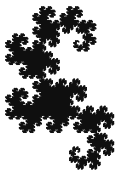
## Lindenmayer-Systeme: Fraktale rekursiv zeichnen



## Lindenmayer-Systeme: Definition

- *Alphabet* Σ ( Beispiel: {F, +, -} )
- $\Sigma^*$ = Menge aller endlichen Wörter über Σ ( Beispiel: F+F+ ist in $\Sigma^*$ )
- P: Σ -> $\Sigma^*$ eine *Produktion*

  Beispiel:

  P(F) = F+F+

  P(+) = +

  P(- ) = -

## Lindenmayer-Systeme: Definition

- *Alphabet* Σ ( Beispiel: {F, +, -} )
- $\Sigma^*$ = Menge aller endlichen Wörter über Σ ( Beispiel: F+F+ ist in $\Sigma^*$ )
- P: Σ -> $\Sigma^*$ eine *Produktion*
- *s* aus $\Sigma^*$ ein *Startwort* ( Beispiel: F)

**Def.:** (Σ, P, s) ist *Lindenmayer-System*.

## Lindenmayer-Systeme: Die beschriebenen Wörter

Die von (Σ, P, s) *beschriebenen* Wörter:

- $w_0$ = F
- $w_1$ = F+F+
- $w_2$ = F+F++F+F++
- $w_3$ = F+F++F+F+++F+F++F+F+++
- ...

$w_2$ entsteht aus $w_1$ durch Ersetzen aller Symbole mittels P.

F → F+F+ + → + - → -

## Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

Turtle-Grafik:

- Schildkröte mit *Position* und *Richtung*

- versteht folgende Kommandos:
  - F: gehe einen Schritt in deine Richtung (und markiere ihn in Schwarz)
  - + / - : drehe dich um 90° gegen / im UZS

## Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

"Zeichnen eines Wortes":

F+F+

## Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

"Zeichnen eines Wortes":

F+F+

## Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

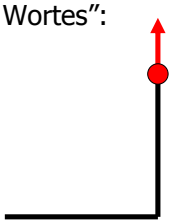
"Zeichnen eines Wortes":

F+F+

## Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

"Zeichnen eines Wortes":

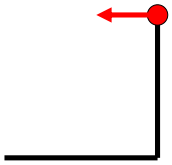
F+F+



## Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

"Zeichnen eines Wortes":

F+F+



## Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen

Zeichnen von $w_i$ :

Im Beispiel: s = F

## Lindenmayer-Systeme: Die Rekursives Zeichnen

Zeichnen von $w_i$:

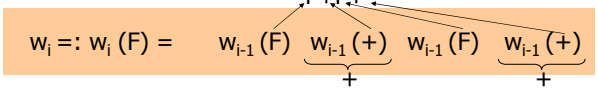
- $w_0$ = F
- $w_1$ = F+F+
- $w_2$ = F+F++F+F++
- $w_3$ = F+F++F+F+++F+F++F+F+++
- ...

$w_3$ =: $w_3$ (F) = $w_2$ (F) $w_2$ (+) $w_2$ (F) $w_2$ (+)

## Lindenmayer-Systeme: Die Rekursives Zeichnen

Zeichnen von $w_i$:

- $w_0$ = F
- $w_1$ = F+F+
- $w_2$ = F+F++F+F++
- $w_3$ = F+F++F+F+++F+F++F+F+++
- ...




## Lindenmayer-Systeme: Die Rekursives Zeichnen

Zeichnen von $w_i$:

- $w_0$ = F
- $w_1$ = F+F+
- $w_2$ = F+F++F+F++
- $w_3$ = F+F++F+F+++F+F++F+F+++
- ...

$w_i =: w_i(F) = w_{i-1}(F) + w_{i-1}(F) +$

## Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen (Beispiel)

```
// POST: the word w_i^F is drawn
void f (unsigned int i) {
  if (i == 0)
    ifm::forward();   // F
  else {
    f(i-1);           // w_{i-1}^F
    ifm::left(90);    // +
    f(i-1);           // w_{i-1}^F
    ifm::left(90);    // +
  }
}
```

Befehle für Turtle-Grafik (aus der `libwindow`-Bibliothek)

$w_i(F) = w_{i-1}(F)+w_{i-1}(F)+$

## Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen (Beispiel)

```
int main () {
  std::cout << "Number of iterations =? ";
  unsigned int n;
  std::cin >> n;

  // draw w_n = w_n(F)
  f(n);

  return 0;
}
```

## Lindenmayer-Systeme: Erweiterungen

Neue Symbole (ohne Interpretation in Turtle-Grafik):

Beispiel *Drachen*:

- s = X
- P(X) = X+YF+, P(Y) = -FX-Y
- $w_i = w_i(X) = w_{i-1}(X)+w_{i-1}(Y)F+$

## Lindenmayer-Systeme: Erweiterungen (Drachen)

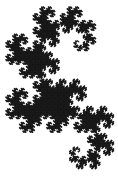
```
// POST: w_i^X is drawn
void x (unsigned int i) {
  if (i > 0) {
    x(i-1);          // w_{i-1}^X
    ifm::left(90);   // +
    y(i-1);          // w_{i-1}^Y
    ifm::forward();  // F
    ifm::left(90);   // +
  }
}

// POST: w_i^Y is drawn
void y (unsigned int i) {
  if (i > 0) {
    ifm::right(90);  // -
    ifm::forward();  // F
    x(i-1);          // w_{i-1}^X
    ifm::right(90);  // -
    y(i-1);          // w_{i-1}^Y
  }
}
```

$w_i(X) = w_{i-1}(X)+w_{i-1}(Y)F+$

$w_i(Y) = -w_{i-1}(F)X-w_{i-1}(Y)$

## Lindenmayer-Systeme: Drachen

Programm **`dragon.C`** :



## Lindenmayer-Systeme: Erweiterungen

Drehwinkel α kann frei gewählt werden.

Beispiel *Schneeflocke*:

- $\alpha = 60^o$
- s = F++F++F
- P(F) = F-F++F-F
- $w_i = w_i(F++F++F) = \underbrace{w_i(F)++w_i(F)++w_i(F)}_{w_{i-1}(F)-w_{i-1}(F)++w_{i-1}(F)-w_{i-1}(F)}$

## Lindenmayer-Systeme: Schneeflocke

```
// POST: the word w_i^F is drawn
void f (unsigned int i) {
  if (i == 0)
    ifm::forward();  // F
  else {
    f(i-1);          // w_{i-1}^F
    ifm::right(60);  // -
    f(i-1);          // w_{i-1}^F
    ifm::left(120);  // ++
    f(i-1);          // w_{i-1}^F
    ifm::right(60);  // -
    f(i-1);          // w_{i-1}^F
  }
}
```

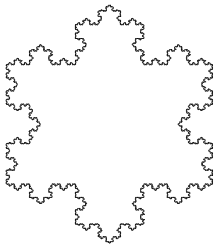
$w_i(F) = w_{i-1}(F)\text{-}w_{i-1}(F)\text{++}w_{i-1}(F)\text{-}w_{i-1}(F)$

## Lindenmayer-Systeme: Schneeflocke

```
int main () {
  std::cout << "Number of iterations =? ";
  unsigned int n;
  std::cin >> n;

  // draw w_n = w_n^F++w_n^F++w_n^F
  f(n);              // w_n^F
  ifm::left(120);    // ++
  f(n);              // w_n^F
  ifm::left(120);    // ++
  f(n);              // w_n^F

  return 0;
}
```

## Lindenmayer-Systeme: Schneeflocke

Programm **`snowflake.C`** :



## Structs und Referenztypen

## Rechnen mit rationalen Zahlen

- Rationale Zahlen (**Q**) sind von der Form n/d, mit n und d aus **Z**
- C++ hat keinen "eingebauten" Typ für rationale Zahlen

Ziel: Wir bauen uns selbst einen C++ Typ für rationale Zahlen!

## Rechnen mit rationalen Zahlen So könnte es aussehen

```
// Program: userational2.C
// Add two rational numbers.
#include <iostream>
#include "rational.h"

int main ()
{
  // input
  std::cout << "Rational number r:\n";
  ifm::rational r;
  std::cin >> r;

  std::cout << "Rational number s:\n";
  ifm::rational s;
  std::cin >> s;

  // computation and output
  std::cout << "Sum is " << r + s << ".\n";

  return 0;
}
```

## Ein erstes Struct

```
// Program: userational.C
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
  int n;
  int d; // INV: d != 0
};

...
```

*Invariante* : Spezifiziert gültige Kombinationen von Werten (informell)

Ein **`struct`** definiert einen neuen Typ, dessen Wertebereich das *kartesische Produkt* der Wertebereiche existierender Typen ist (hier **`int × int`**).

## Ein erstes Struct

```
// Program: userational.C
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
  int n;
  int d; // INV: d != 0
};

...
```

Bedeutung: jedes *Objekt* des neuen Typs ist durch zwei Objekte vom Typ **`int`** repräsentiert, die die Namen **`n`** und **`d`** tragen.

Ein struct definiert einen *Typ*, keine *Variable* !

# Ein erstes Struct : Funktionalität

```
// Program: userational.C
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
  int n;
  int d; // INV: d != 0
};

// POST: return value is the sum of a and b
rational add (rational a, rational b)
{
  rational result;
  result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  result.d = a.d * b.d;
  return result;
}
```

*Mitglieds-Zugriff* auf die **int**- Objekte von **a**

# Ein erstes Struct : Funktionalität

```
// Program: userational.C
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
  int n;
  int d; // INV: d != 0
};

// POST: return value is the sum of a and b
rational add (rational a, rational b)
{
  rational result;
  result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  result.d = a.d * b.d;
  return result;
}
```

$$a + b = \frac{\text{Zähler(a)} \cdot \text{Nenner(b)} + \text{Nenner(a)} \cdot \text{Zähler(b)}}{\text{Nenner(a)} \cdot \text{Nenner(b)}}$$

# Ein erstes Struct: Funktionalität

```
// Program: userational.C
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
  int n;
  int d; // INV: d != 0
};

// POST: return value is the sum of a and b
rational add (rational a, rational b)
{
  rational result;
  result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  result.d = a.d * b.d;
  return result;
}
```

Der neue Typ kann wie existierende Typen benutzt werden, z.B. in

Variablendeklarationen...

# Ein erstes Struct: Funktionalität

```
// Program: userational.C
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
  int n;
  int d; // INV: d != 0
};

// POST: return value is the sum of a and b
rational add (rational a, rational b)
{
  rational result;
  result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  result.d = a.d * b.d;
  return result;
}
```

Der neue Typ kann wie existierende Typen benutzt werden, z.B. in

formalen Argumentlisten...

# Ein erstes Struct: Funktionalität

```
// Program: userational.C
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
  int n;
  int d; // INV: d != 0
};

// POST: return value is the sum of a and b
rational add (rational a, rational b)
{
  rational result;
  result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  result.d = a.d * b.d;
  return result;
}
```

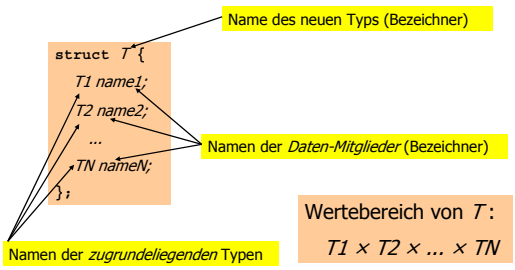
Der neue Typ kann wie existierende Typen benutzt werden, z.B. in

Rückgabetypen...

# Ein erstes Struct: Benutzung

```
int main ()
{
  // input
  std::cout << "Rational number r:\n";
  rational r;
  std::cout << " numerator =?   "; std::cin >> r.n;
  std::cout << " denominator =? "; std::cin >> r.d;

  std::cout << "Rational number s:\n";
  rational s;
  std::cout << " numerator =?   "; std::cin >> s.n;
  std::cout << " denominator =? "; std::cin >> s.d;

  // computation
  rational t = add (r, s);

  // output
  std::cout << "Sum is " << t.n << "/" << t.d << ".\n";

  return 0;
}
```

# Struct-Definitionen




Wertebereich von *T*:

*T1* × *T2* × ... × *TN*

# Struct-Definitionen: Beispiele

```
struct rational_vector_3 {
  rational x;
  rational y;
  rational z;
};
```

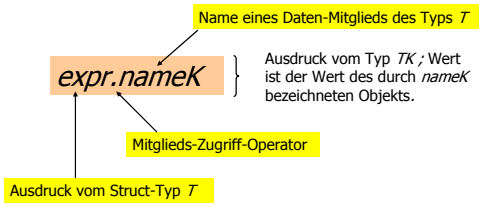
Die zugrundeliegenden Typen können fundamentale, aber auch benutzerdefinierte Typen sein.

## Struct-Definitionen: Beispiele

```
struct extended_int {
  // represents u if n==false and -u otherwise
  unsigned int u;  // absolute value
  bool         n;  // sign bit
};
```

Die zugrundeliegenden Typen können natürlich auch verschieden sein.

## Structs: Mitglieds-Zugriff




## Structs: Initialisierung und Zuweisung

Initialisierung:

```
rational t = add (r, s);
```

```
"t.n = add (r, s).n;
 t.d = add (r, s).d;"
```

- `t` wird mit dem Wert von `add (r, s)` initialisiert
- Initialisierung erfolgt separat für jedes Daten-Mitglied

## Structs: Initialisierung und Zuweisung

Default-Initialisierung:

```
rational t;
```

- Daten-Mitglieder von `t` werden default-initialisiert
- für Daten-Mitglieder fundamentaler Typen passiert nichts (Wert undefiniert)

## Structs: Initialisierung und Zuweisung

Zuweisung:

```
rational t;
t = add (r, s);
```

- `t` wird default-initialisiert
- der Wert von `add (r,s)` wird `t` zugewiesen (wieder separat für jedes Daten-Mitglied)

## Structs und Felder

- Felder können auch Mitglieder von Structs sein

```
struct rational_vector_3 {
  rational v[3];
};
```

- Durch Verpacken in ein Struct kann das Kopieren von Feldern erreicht werden!

## Structs und Felder

```
#include<iostream>

struct point {
  double coord[2];
};

int main()
{
  point p;
  p.coord[0] = 1;
  p.coord[1] = 2;

  point q = p; // Hier wird ein Feld mit zwei Elementen kopiert
  std::cout << q.coord[0] << " "    // 1
            << q.coord[1] << "\n";  // 2

  return 0;
}
```

## Structs: Gleichheitstest?

Für jeden fundamentalen Typ gibt es die Vergleichsoperatoren `==` und `!=` , aber *nicht* für Structs! Warum?

- Mitgliedsweiser Vergleich ergibt im allgemeinen keinen Sinn,...
- ...denn dann wäre z.B. 2/3 ≠ 4/6

## Benutzerdefinierte Operatoren

Anstatt

```
rational t = add (r, s);
```

würden wir lieber

```
rational t = r + s;
```

schreiben.

Dies geht mit *Operator-Überladung*.

## Funktions- und Operator-Überladung

*Verschiedene* Funktionen können den *gleichen* Namen haben.

```
// POST: returns a * a
rational square (rational a);

// POST: returns a * a
extended_int square (extended_int a);
```

Der Compiler findet anhand der Aufruf-Argumente heraus, welche gemeint ist.

## Operator-Überladung

- Operatoren sind spezielle Funktionen und können auch überladen werden
- Name des Operators *op* :

  `operator`*op*

- wir wissen schon, dass z.B. `operator+` für verschiedene Typen existiert

## Additionsoperator für rationale Zahlen

Bisher:

```
// POST: return value is the sum of a and b
rational add (rational a, rational b)
{
  rational result;
  result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  result.d = a.d * b.d;
  return result;
}
...
rational t = add (r, s);
```

## Additionsoperator für rationale Zahlen

Neu:

```
// POST: return value is the sum of a and b
rational operator+ (rational a, rational b)
{
  rational result;
  result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  result.d = a.d * b.d;
  return result;
}
...
rational t = r + s;
```

Infix-Notation

## Additionsoperator für rationale Zahlen

Neu:

```
// POST: return value is the sum of a and b
rational operator+ (rational a, rational b)
{
  rational result;
  result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  result.d = a.d * b.d;
  return result;
}
...
rational t = operator+ (r, s);
```

Äquivalent, aber unpraktisch: funktionale Notation

## Andere binäre arithmetische Operatoren für rationale Zahlen

```
// POST: return value is the difference of a and b
rational operator- (rational a, rational b);

// POST: return value is the product of a and b
rational operator* (rational a, rational b);

// POST: return value is the quotient of a and b
// PRE:  b != 0
rational operator/ (rational a, rational b);
```

## Unäres Minus

Hat gleiches Symbol wie binäres Minus, aber nur *ein* Argument:

```
// POST: return value is -a
rational operator- (rational a)
{
  a.n = -a.n;
  return a;
}
```

## Relationale Operatoren

Sind für Structs nicht "eingebaut", können aber definiert werden:

```
// POST: return value is true if and only if a == b
bool operator== (rational a, rational b)
{
  return a.n * b.d == a.d * b.n;
}
```

## Arithmetische Zuweisungen

Wir wollen z.B. schreiben:

```
rational r;
r.n = 1; r.d = 2;                          // 1/2

rational s;
s.n = 1; s.d = 3;                          // 1/3

r += s;
std::cout << r.n << "/" << r.d << "\n";    // 5/6
```

operator+=

## Das Problem mit `operator+=`

Erster Versuch:

```
rational operator+= (rational a, rational b)
{
  a.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  a.d *= b.d;
  return a;
}
```

Problem: Der Ausdruck `r += s` hat zwar den gewünschten *Wert* r + s, aber nicht den gewünschten *Effekt* der Veränderung von `r`, weil ein Funktionsaufruf die Werte der Aufrufargumente nicht ändert.

Das funktioniert nicht!

## Das Problem mit `operator+=`

- Wir müssen Funktionen in die Lage versetzen, die Werte ihrer Aufrufparameter ändern zu können!
- Dazu brauchen wir kein neues Konzept auf der Funktionenseite, sondern eine neue Klasse von Typen.

Referenztypen

## Referenztypen: Definition

*T* &  } gelesen als "*T*-Referenz"

zugrundeliegender Typ

- *T* & hat gleichen Wertebereich und gleiche Funktionalität wie *T* ,...
- ... nur die Initialisierungs- und Zuweisungssemantik ist anders.

## Referenztypen: Initialisierung

- Eine Variable mit Referenztyp (eine *Referenz*) kann nur mit einem L-Wert initialisiert werden
- die Variable wird dabei ein *Alias* des L-Werts (ein anderer Name für das Objekt hinter dem L-Wert)

## Referenztypen: Initialisierung und Zuweisung

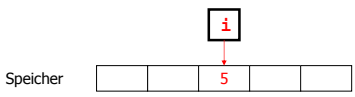
Beispiel:

```
int i = 5;
int& j = i;              // j becomes an alias of i

j = 6;                   // changes the value of  i
std::cout << i << "\n";  // outputs 6
```

## Referenztypen: Initialisierung und Zuweisung

Beispiel:

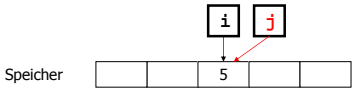
```
int i = 5;
int& j = i;              // j becomes an alias of i

j = 6;                   // changes the value of  i
std::cout << i << "\n";  // outputs 6
```



## Referenztypen: Initialisierung

Beispiel:

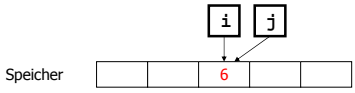
```
int i = 5;
int& j = i;              // j becomes an alias of i

j = 6;                   // changes the value of  i
std::cout << i << "\n";  // outputs 6
```




## Referenztypen: Zuweisung

Beispiel:

```
int i = 5;
int& j = i;              // j becomes an alias of i

j = 6;                   // changes the value of  i
std::cout << i << "\n";  // outputs 6
```

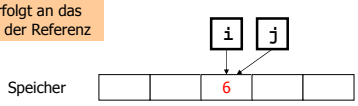



## Referenztypen: Zuweisung

Beispiel:

```
int i = 5;
int& j = i;              // j becomes an alias of i

j = 6;                   // changes the value of  i
std::cout << i << "\n";  // outputs 6
```

Zuweisung erfolgt an das Objekt hinter der Referenz



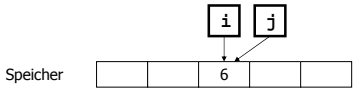

## Referenzen sind implizite Zeiger (aber einfacher und sicherer)

Mit Referenzen:

```
int i = 5;
int& j = i;

j = 6;
std::cout << i << "\n";
```

Mit Zeigern:

```
int i = 5;
int* j = &i;

*j = 6;
std::cout << i << "\n";
```



## Referenztypen: Realisierung

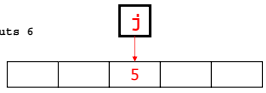
- Intern wird ein Wert vom Typ *T*& durch die Adresse eines Objekts vom Typ *T* repräsentiert

```
int& j;      // error: j must be an alias of something
int& k = 5;  // error: the literal 5 has no address
```

## *Call by Reference*

- Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufargumente zu ändern:

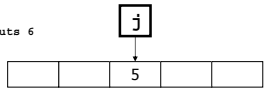
```
void increment (int& i)
{
  ++i;
}

int main ()
{
  int j = 5;
  increment (j);
  std::cout << j << "\n"; // outputs 6

  return 0;
}
```




## *Call by Reference*

- Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufargumente zu ändern:

```
void increment (int& i)
{
  ++i;
}

int main ()
{
  int j = 5;
  increment (j);
  std::cout << j << "\n"; // outputs 6

  return 0;
}
```

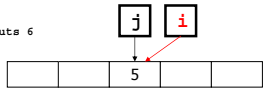



## *Call by Reference*

- Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufargumente zu ändern:

```
void increment (int& i)
{ // i becomes alias of call parameter
  ++i;
}

int main ()
{
  int j = 5;
  increment (j);
  std::cout << j << "\n"; // outputs 6

  return 0;
}
```

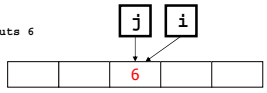
Initialisierung der formalen Parameter



## Call by Reference

- Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufargumente zu ändern:

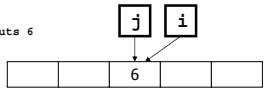
```
void increment (int& i)
{ // i becomes alias of call parameter
  ++i;
}

int main ()
{
  int j = 5;
  increment (j);
  std::cout << j << "\n"; // outputs 6

  return 0;
}
```




## Call by Reference

- Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufparameter zu ändern:

```
void increment (int& i)
{ // i becomes alias of call parameter
  ++i;
}

int main ()
{
  int j = 5;
  increment (j);
  std::cout << j << "\n"; // outputs 6

  return 0;
}
```




## Call by Value / Reference

- formales Argument hat Referenztyp:

  *call by reference*

  formales Argument wird (intern) mit der Adresse des Aufruf-arguments (L-Wert) initialisiert und wird damit zu einem Alias

- formales Argument hat keinen Referenztyp:

  *call by value*

  formales Argument wird mit dem Wert des Aufrufparameters (R-Wert) initialisiert und wird damit zu einer Kopie

## Return by Value / Reference

- Auch der Rückgabetyp einer Funktion kann ein Referenztyp sein (*return by reference*)
- In diesem Fall ist der Funktionsausfruf selbst ein L-Wert

## *Return by Value / Reference*

- Auch der Rückgabetyp einer Funktion kann ein Referenztyp sein (*return by reference*)
- In diesem Fall ist der Funktionsausfruf selbst ein L-Wert

```
int& increment (int& i)
{
  return ++i;
}
```

exakt die Semantik des Prä-Inkrements:

## Die Lösung für `operator+=`

Bisher (funktioniert nicht):

```
rational operator+= (rational a, rational b)
{
  a.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  a.d *= b.d;
  return a;
}
```

## Die Lösung für `operator+=`

Neu:

```
// POST: b has been added to a;
//       return value is the new value of a
rational& operator+= (rational& a, rational b)
{
  a.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
  a.d *= b.d;
  return a;
}
```

Der L-Wert a wird um den Wert von b inkrementiert und als L-Wert zurückgegeben

## Ein-/Ausgabeoperatoren

- können auch überladen werden!

Bisher:

```
std::cout << "Sum is " << t.n << "/" << t.d << "\n";
```

Neu (gewünscht):

```
std::cout << "Sum is " << t << "\n";
```

# Ein-/Ausgabeoperatoren

- können auch überladen werden!

Das kann wie folgt erreicht werden:

```
// POST: a has been written to o
std::ostream& operator<< (std::ostream& o, rational r)
{
  return o << r.n << "/" << r.d;
}
```

schreibt `r` auf den Ausgabestrom `o` und gibt diesen als L-Wert zurück