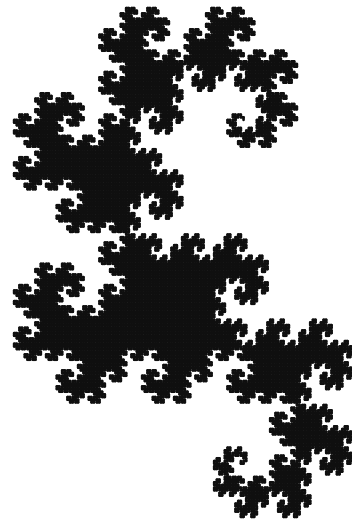


# Lindenmayer-Systeme: Fraktale rekursiv zeichnen

---



# Lindenmayer-Systeme:

## Definition

---

- *Alphabet*  $\Sigma$  ( **Beispiel: {F, +, -}** )

# Lindenmayer-Systeme:

## Definition

---

- *Alphabet*  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $\{F, +, -\}$**  )
- $\Sigma^*$  = Menge aller endlichen Wörter über  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $F+F+$  ist in  $\Sigma^*$**  )

# Lindenmayer-Systeme:

## Definition

---

- *Alphabet*  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $\{F, +, -\}$**  )
- $\Sigma^*$  = Menge aller endlichen Wörter über  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $F+F+$  ist in  $\Sigma^*$**  )
- $P: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$  eine *Produktion*

# Lindenmayer-Systeme:

## Definition

- *Alphabet*  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $\{F, +, -\}$**  )
- $\Sigma^*$  = Menge aller endlichen Wörter über  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $F+F+$  ist in  $\Sigma^*$**  )
- $P: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$  eine *Produktion*

**Beispiel:**

$$P(F) = F+F+$$

$$P(+ ) = +$$

$$P(- ) = -$$

# Lindenmayer-Systeme:

## Definition

---

- *Alphabet*  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $\{F, +, -\}$**  )
- $\Sigma^*$  = Menge aller endlichen Wörter über  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $F+F+$  ist in  $\Sigma^*$**  )
- $P: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$  eine *Produktion*
- $s$  aus  $\Sigma^*$  ein *Startwort* ( **Beispiel:  $F$**  )

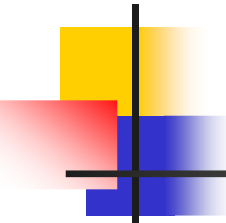
# Lindenmayer-Systeme:

## Definition

---

- *Alphabet*  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $\{F, +, -\}$**  )
- $\Sigma^*$  = Menge aller endlichen Wörter über  $\Sigma$  ( **Beispiel:  $F+F+$  ist in  $\Sigma^*$**  )
- $P: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$  eine *Produktion*
- $s$  aus  $\Sigma^*$  ein *Startwort* ( **Beispiel:  $F$**  )

**Def.:**  $(\Sigma, P, s)$  ist *Lindenmayer-System*.



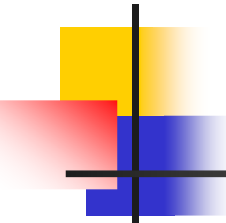
# Lindenmayer-Systeme: Die beschriebenen Wörter

---

Die von  $(\Sigma, P, s)$  *beschriebenen* Wörter:

- $W_0 = F$
- $W_1 = F+F+$
- $W_2 = F+F++F+F++$
- $W_3 = F+F++F+F++++F+F++F+F+++$
- ...





# Lindenmayer-Systeme: Die beschriebenen Wörter

Die von  $(\Sigma, P, s)$  *beschriebenen* Wörter:

- $w_0 = F$
- $w_1 = F+F+$
- $w_2 = F+F++F+F++$
- $w_3 = F+F++F+F+++F+F++F+F+++$
- ...

$w_i$  entsteht aus  $w_{i-1}$  durch Ersetzen aller Symbole mittels  $P$ .

# Lindenmayer-Systeme: Die beschriebenen Wörter

Die von  $(\Sigma, P, s)$  *beschriebenen* Wörter:

- $w_0 = F$
- $w_1 = F+F+$
- $w_2 = F+F++F+F++$
- $w_3 = F+F+++F+F++++F+F+++F+F++++$
- ...

$w_2$  entsteht aus  $w_1$  durch Ersetzen aller Symbole mittels  $P$ .

$F \rightarrow F+F+$        $+ \rightarrow +$        $- \rightarrow -$

# Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

---

Turtle-Grafik:

- Schildkröte mit *Position* und *Richtung*



# Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

Turtle-Grafik:

- Schildkröte mit *Position* und *Richtung*



- versteht folgende Kommandos:
  - F: gehe einen Schritt in deine Richtung (und markiere ihn in Schwarz)
  - + / - : drehe dich um 90° gegen / im UZS

# Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

---

“Zeichnen eines Wortes”:

F+F+



# Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

“Zeichnen eines Wortes”:

F+F+



# Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

---

“Zeichnen eines Wortes”:

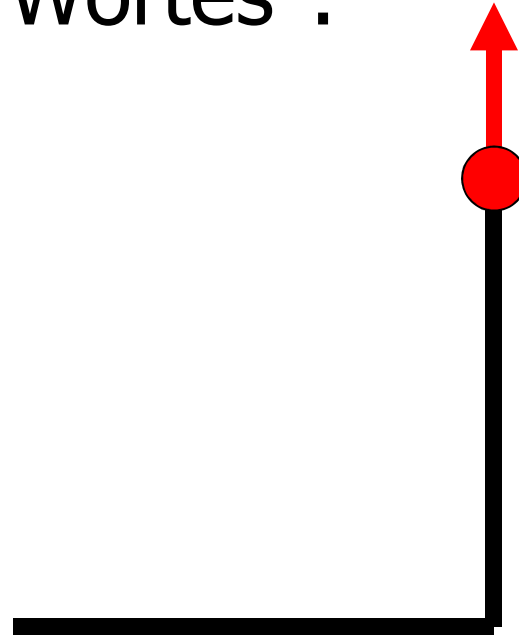
F+F+



# Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

“Zeichnen eines Wortes”:

F+F+

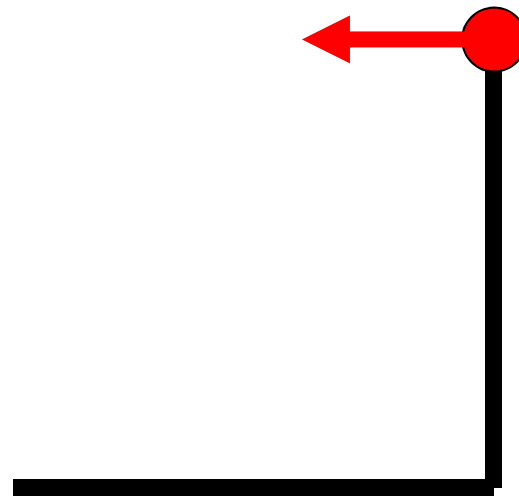




# Lindenmayer-Systeme: Turtle-Grafik

“Zeichnen eines Wortes”:

F+F+



# Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen

Zeichnen von  $w_i$ :

○  $w_0 = F$

○  $w_1 = F+F+$

○  $w_2 = F+F++F+F++$

○  $w_3 = F+F++F+F+++F+F++F+F++$

○ ...

$w_3 =: w_3(F) = w_2(F) w_2(+)$   $w_2(F) w_2(+)$

# Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen

Zeichnen von  $w_i$ :

- $w_0 = F$
- $w_1 = F+F+$
- $w_2 = F+F++F+F+++$
- $w_3 = \underbrace{F+F++F+F+++}_{w_2} + \underbrace{F+F++F+F+++}_{w_2} +$
- ...

$$w_i =: w_i(F) = w_{i-1}(F) w_{i-1}(+) w_{i-1}(F) w_{i-1}(+)$$

# Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen

Zeichnen von  $w_i$ :

- $w_0 = F$
- $w_1 = F+F+$
- $w_2 = F+F++F+F++$
- $w_3 = F+F++F+F+++F+F++F+F++$
- ...

$F+F+ \equiv w_1(F)$

$$w_i ::= w_i(F) = w_{i-1}(F) \underbrace{w_{i-1}(+) +}_{+} w_{i-1}(F) \underbrace{w_{i-1}(+) +}_{+}$$

# Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen

Zeichnen von  $w_i$ :

- $w_0 = F$
- $w_1 = F+F+$
- $w_2 = F+F++F+F+++$
- $w_3 = \underbrace{F+F+++F+F++++}_{w_2} + \underbrace{F+F+++F+F++++}_{w_2} +$
- ...

$$w_i =: w_i(F) = w_{i-1}(F) + w_{i-1}(F) +$$

# Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen (Beispiel)

```
// POST: the word  $w_i^F$  is drawn
void f (const unsigned int i) {
    if (i == 0)
        ifm::forward(); // F
    else {
        f(i-1); //  $w_{i-1}^F$ 
        ifm::left(90); // +
        f(i-1); //  $w_{i-1}^F$ 
        ifm::left(90); // +
    }
}
```

$$w_i(F) = w_{i-1}(F) + w_{i-1}(F) +$$

# Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen (Beispiel)

```
// POST: the word  $w_i^F$  is drawn
void f (const unsigned int i) {
    if (i == 0)
        ifm::forward(); // F
    else {
        f(i-1); //  $w_{i-1}^F$ 
        ifm::left(90); // +
        f(i-1); //  $w_{i-1}^F$ 
        ifm::left(90); // +
    }
}
```

Befehle für Turtle-Grafik (aus  
der `libwindow`-Bibliothek)

$$w_i(F) = w_{i-1}(F) + w_{i-1}(F) +$$

# Lindenmayer-Systeme: Rekursives Zeichnen (Beispiel)



```
int main () {
    std::cout << "Number of iterations =? ";
    unsigned int n;
    std::cin >> n;

    // draw w_n = w_n(F)
    f(n);

    return 0;
}
```





# Lindenmayer-Systeme: Erweiterungen

---

Neue Symbole (ohne Interpretation in Turtle-Grafik):

Beispiel *Drachenkurve*:

- $s = X$
- $P(X) = X+YF+, P(Y) = -FX-Y$
- $w_i = w_i(X) = w_{i-1}(X)+w_{i-1}(Y)F+$

# Lindenmayer-Systeme: Erweiterungen (Drachen)

```
// POST: w_i^X is drawn
void x (const unsigned int i) {
    if (i > 0) {
        x(i-1);           // w_{i-1}^X
        ifm::left(90);    // +
        y(i-1);           // w_{i-1}^Y
        ifm::forward();   // F
        ifm::left(90);    // +
    }
}

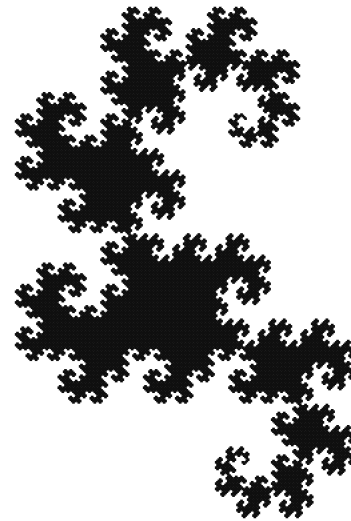
// POST: w_i^Y is drawn
void y (const unsigned int i) {
    if (i > 0) {
        ifm::right(90);   // -
        ifm::forward();   // F
        x(i-1);           // w_{i-1}^X
        ifm::right(90);   // -
        y(i-1);           // w_{i-1}^Y
    }
}
```

$$W_i(X) = W_{i-1}(X) + W_{i-1}(Y)F +$$

$$W_i(Y) = -FW_{i-1}(X) - W_{i-1}(Y)$$

# Lindenmayer-Systeme: Drachen

Programm `dragon.cpp` :



# Lindenmayer-Systeme: Erweiterungen

Drehwinkel  $\alpha$  kann frei gewählt werden.

Beispiel *Schneeflocke*:

- $\alpha = 60^\circ$
- $s = F++F++F$
- $P(F) = F-F++F-F$
- $w_i = w_i(F++F++F) = w_i(F)++w_i(F)++w_i(F)$   
 $\underbrace{w_{i-1}(F)-w_{i-1}(F)++w_{i-1}(F)-w_{i-1}(F)}$

# Lindenmayer-Systeme: Schneeflocke

```
// POST: the word  $w_i^F$  is drawn
void f (const unsigned int i) {
    if (i == 0)
        ifm::forward(); // F
    else {
        f(i-1); //  $w_{i-1}^F$ 
        ifm::right(60); // -
        f(i-1); //  $w_{i-1}^F$ 
        ifm::left(120); // ++
        f(i-1); //  $w_{i-1}^F$ 
        ifm::right(60); // -
        f(i-1); //  $w_{i-1}^F$ 
    }
}
```

$$w_i(F) = w_{i-1}(F) - w_{i-1}(F) ++ w_{i-1}(F) - w_{i-1}(F)$$



# Lindenmayer-Systeme: Schneeflocke

---

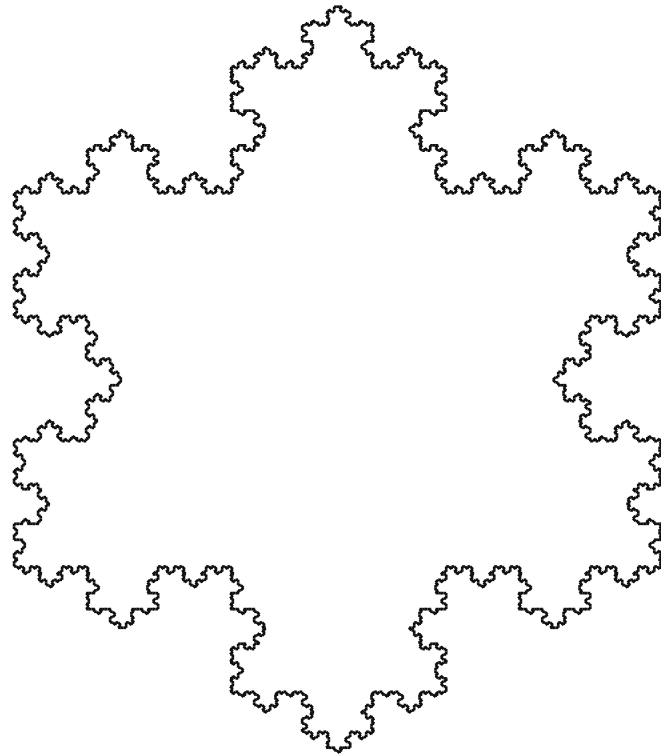
```
int main () {
    std::cout << "Number of iterations =? ";
    unsigned int n;
    std::cin >> n;

    // draw  $w_n = w_n^F ++ w_n^F ++ w_n^F$ 
    f(n);           //  $w_n^F$ 
    ifm::left(120); // ++
    f(n);           //  $w_n^F$ 
    ifm::left(120); // ++
    f(n);           //  $w_n^F$ 

    return 0;
}
```

# Lindenmayer-Systeme: Schneeflocke

Programm `snowflake.cpp` :





# Structs und Referenztypen

---

Rationale Zahlen, Struct-  
Definition, Referenztypen,  
Operator-Überladung





# Rechnen mit rationalen Zahlen

---

- Rationale Zahlen (**Q**) sind von der Form  $n/d$ , mit  $n$  und  $d$  aus **Z**
- C++ hat keinen "eingebauten" Typ für rationale Zahlen



# Rechnen mit rationalen Zahlen

---

- Rationale Zahlen (**Q**) sind von der Form  $n/d$ , mit  $n$  und  $d$  aus **Z**
- C++ hat keinen “eingebauten” Typ für rationale Zahlen

Ziel: Wir bauen uns selbst einen C++ Typ für rationale Zahlen!

# Rechnen mit rationalen Zahlen

## So könnte (wird) es aussehen

---

```
// Program: userational2.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>
#include "rational.cpp"

int main ()
{
    // input
    std::cout << "Rational number r:\n";
    ifm::rational r;
    std::cin >> r;

    std::cout << "Rational number s:\n";
    ifm::rational s;
    std::cin >> s;

    // computation and output
    std::cout << "Sum is " << r + s << ".\n";

    return 0;
}
```



# Ein erstes Struct

---

```
// Program: userational.cpp  
// Add two rational numbers.  
#include <iostream>
```

```
// the new type rational  
struct rational {  
    int n;  
    int d; // INV: d != 0  
};
```

```
...
```



# Ein erstes Struct

---

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};

...
```

Ein `struct` definiert einen neuen Typ, dessen Wertebereich das *kartesische Produkt* der Wertebereiche existierender Typen ist (hier `int × int`).



# Ein erstes Struct

---

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>
```

```
// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};
```

```
...
```

*Invariante* : Spezifiziert  
gültige Kombinationen  
von Werten (informell)

Ein `struct` definiert einen neuen Typ, dessen Wertebereich das *kartesische Produkt* der Wertebereiche existierender Typen ist (hier `int × int`).



# Ein erstes Struct

---

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};

...
```

Ein struct definiert einen *Typ*, keine *Variable* !



# Ein erstes Struct

---

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};
```

...

Bedeutung: jedes *Objekt* des neuen Typs ist durch zwei Objekte vom Typ `int` repräsentiert, die die Namen `n` und `d` tragen.

Ein struct definiert einen *Typ*, keine *Variable* !





# Ein erstes Struct : Funktionalität

---

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};

// POST: return value is the sum of a and b
rational add (const rational a, const rational b)
{
    rational result;
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    result.d = a.d * b.d;
    return result;
}
```

# Ein erstes Struct : Funktionalität

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>

// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};

// POST: return value is the sum of a and b
rational add (const rational a, const rational b)
{
    rational result;
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    result.d = a.d * b.d;
    return result;
}
```

*Mitglieds-Zugriff auf die  
int- Objekte von a*

# Ein erstes Struct : Funktionalität

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>
```

```
// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};
```

$a + b =$

$$\frac{\text{Zähler}(a) \cdot \text{Nenner}(b) + \text{Nenner}(a) \cdot \text{Zähler}(b)}{\text{Nenner}(a) \cdot \text{Nenner}(b)}$$

```
// POST: return value is the sum of a and b
rational add (const rational a, const rational b)
{
    rational result;
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    result.d = a.d * b.d;
    return result;
}
```

# Ein erstes Struct : Funktionalität

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>
```

```
// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};
```

$a + b = \text{result} =$

$$\frac{\text{Zähler}(a) \cdot \text{Nenner}(b) + \text{Nenner}(a) \cdot \text{Zähler}(b)}{\text{Nenner}(a) \cdot \text{Nenner}(b)}$$

```
// POST: return value is the sum of a and b
rational add (const rational a, const rational b)
{
    rational result;
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    result.d = a.d * b.d;
    return result;
}
```



# Ein erstes Struct: Funktionalität

---

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>
```

```
// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};
```

```
// POST: return value is the sum of a and b
rational add (const rational a, const rational b)
{
    rational result;
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    result.d = a.d * b.d;
    return result;
}
```

Der neue Typ kann wie existierende Typen benutzt werden, z.B. in

**Variablendeklarationen...**



# Ein erstes Struct: Funktionalität

---

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>
```

```
// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};
```

```
// POST: return value is the sum of a and b
rational add (const rational a, const rational b)
{
    rational result;
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    result.d = a.d * b.d;
    return result;
}
```

Der neue Typ kann wie existierende Typen benutzt werden, z.B. in

formalen Argumentlisten...

# Ein erstes Struct: Funktionalität

```
// Program: userational.cpp
// Add two rational numbers.
#include <iostream>
```

```
// the new type rational
struct rational {
    int n;
    int d; // INV: d != 0
};
```

```
// POST: return value is the sum of a and b
rational add (const rational a, const rational b)
{
    rational result;
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    result.d = a.d * b.d;
    return result;
}
```

Der neue Typ kann wie existierende Typen benutzt werden, z.B. in

Rückgabetypen...



# Ein erstes Struct: Benutzung

---

```
int main ()
{
    // input
    std::cout << "Rational number r:\n";
    rational r;
    std::cout << " numerator =?   "; std::cin >> r.n;
    std::cout << " denominator =? "; std::cin >> r.d;

    std::cout << "Rational number s:\n";
    rational s;
    std::cout << " numerator =?   "; std::cin >> s.n;
    std::cout << " denominator =? "; std::cin >> s.d;

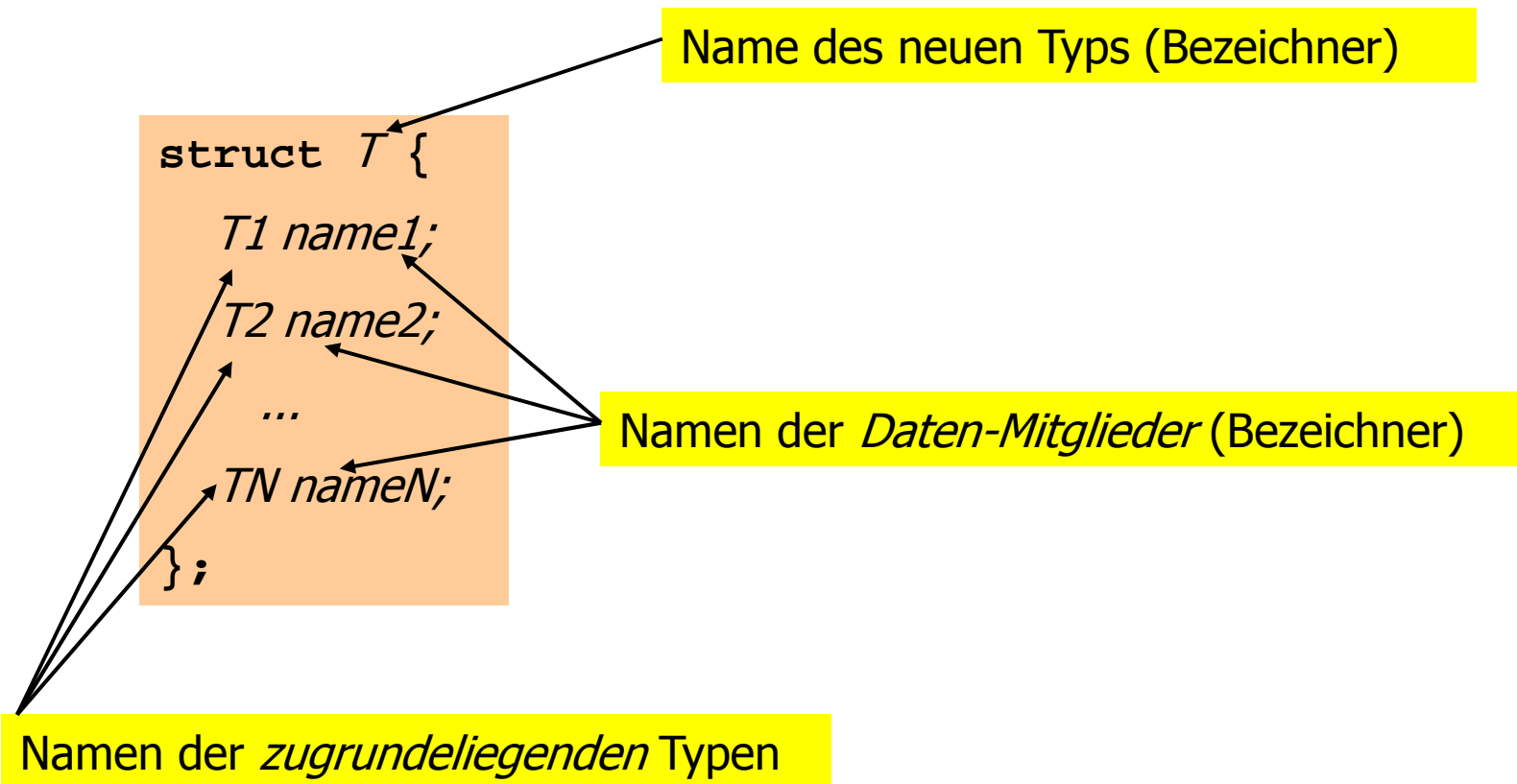
    // computation
    const rational t = add (r, s);

    // output
    std::cout << "Sum is " << t.n << "/" << t.d << ".\n";

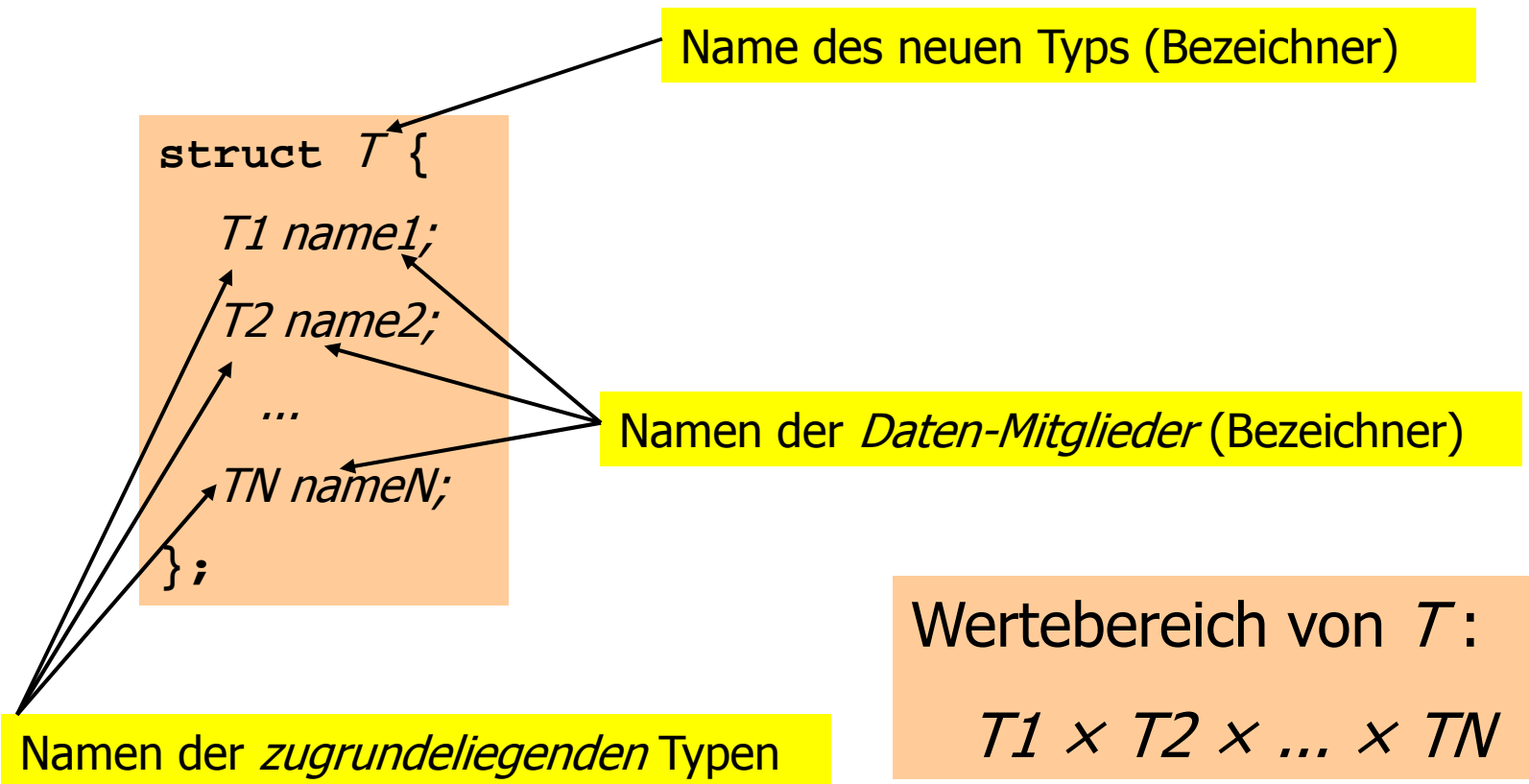
    return 0;
}
```



# Struct-Definitionen



# Struct-Definitionen





# Struct-Definitionen: Beispiele

---

```
struct rational_vector_3 {  
    rational x;  
    rational y;  
    rational z;  
};
```

Die zugrundeliegenden Typen können fundamentale, aber auch **benutzerdefinierte** Typen sein.



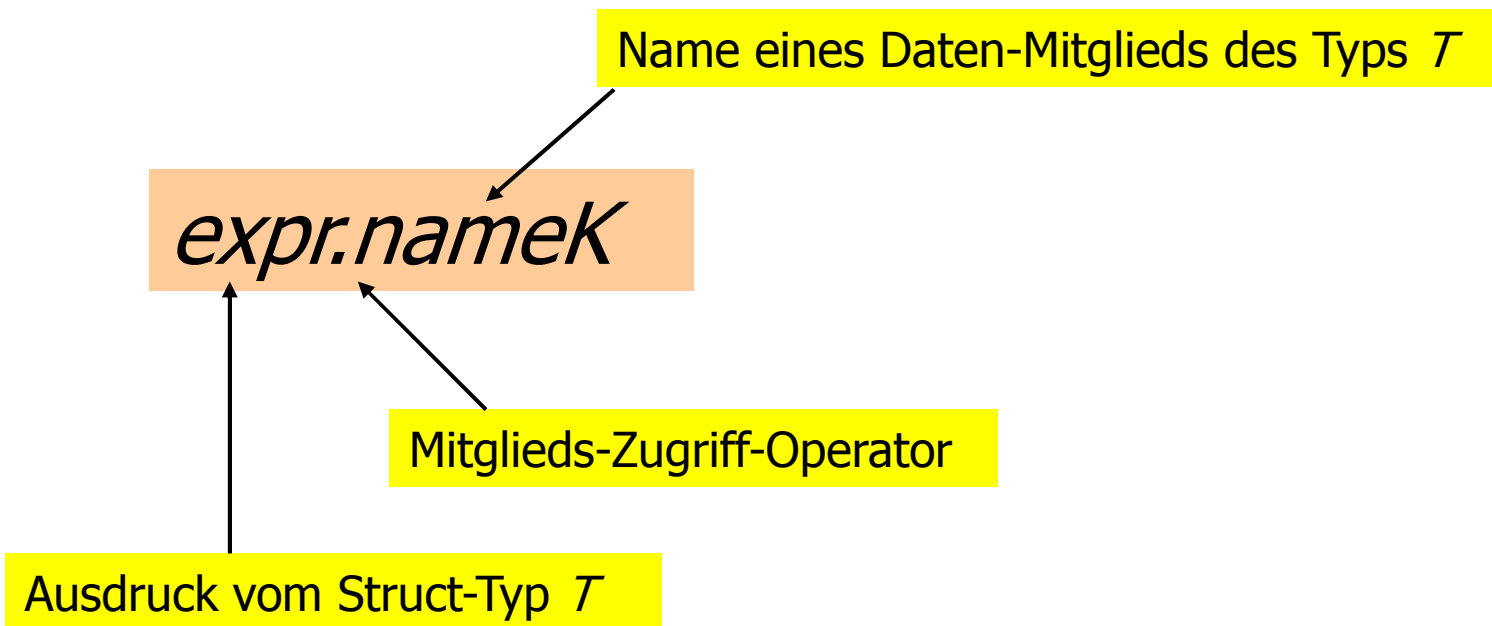
# Struct-Definitionen: Beispiele

---

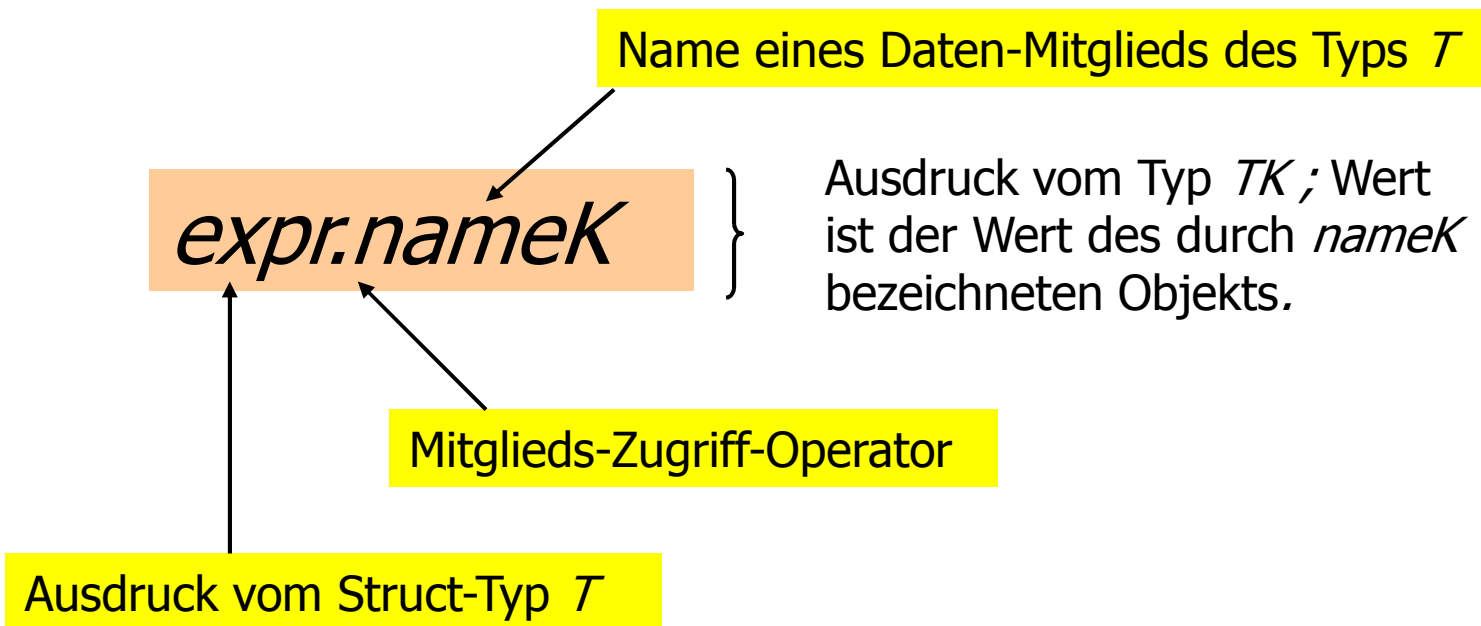
```
struct extended_int {  
    // represents u if n==false and -u otherwise  
    unsigned int u; // absolute value  
    bool        n; // sign bit  
};
```

Die zugrundeliegenden Typen können natürlich auch **verschieden** sein.

# Structs: Mitglieds-Zugriff



# Structs: Mitglieds-Zugriff





# Structs: Initialisierung und Zuweisung

---

Initialisierung:

```
rational t = add (r, s);
```



# Structs: Initialisierung und Zuweisung

---

Initialisierung:

```
rational t = add (r, s);
```

- `t` wird mit dem Wert von `add (r, s)` initialisiert
- Initialisierung erfolgt separat für jedes Daten-Mitglied



# Structs: Initialisierung und Zuweisung

Initialisierung:

```
"t.n = add (r, s).n;  
t.d = add (r, s).d;"
```

```
rational t = add (r, s);
```

- `t` wird mit dem Wert von `add (r, s)` initialisiert
- Initialisierung erfolgt separat für jedes Daten-Mitglied



# Structs: Initialisierung und Zuweisung

---

Default-Initialisierung:

```
rational t;
```

- Daten-Mitglieder von  $t$  werden default-initialisiert
- für Daten-Mitglieder fundamentaler Typen passiert nichts (Wert undefiniert)

# Structs: Initialisierung und Zuweisung



---

Zuweisung:

```
rational t;  
t = add (r, s);
```

- `t` wird default-initialisiert
- der Wert von `add (r, s)` wird `t` zugewiesen (wieder separat für jedes Daten-Mitglied)



# Structs und Felder

---

- Felder können auch Mitglieder von Structs sein



# Structs und Felder

---

- Felder können auch Mitglieder von Structs sein

```
struct rational_vector_3 {  
    rational v[3];  
};
```



# Structs und Felder

---

- Felder können auch Mitglieder von Structs sein

```
struct rational_vector_3 {  
    rational v[3];  
};
```

- Durch Verpacken in ein Struct kann das Kopieren von Feldern erreicht werden!



# Structs und Felder

---

```
#include<iostream>

struct point {
    double coord[2];
};

int main()
{
    point p;
    p.coord[0] = 1;
    p.coord[1] = 2;

    point q = p; // Hier wird ein Feld mit zwei Elementen kopiert
    std::cout << q.coord[0] << " "    // 1
               << q.coord[1] << "\n"; // 2

    return 0;
}
```



# Structs: Gleichheitstest?

---

Für jeden fundamentalen Typ gibt es die Vergleichsoperatoren `==` und `!=`, aber *nicht* für Structs! Warum?





# Structs: Gleichheitstest?

---

Für jeden fundamentalen Typ gibt es die Vergleichsoperatoren `==` und `!=`, aber *nicht* für Structs! Warum?

- Mitgliedsweiser Vergleich ergibt im allgemeinen keinen Sinn,...



# Structs: Gleichheitstest?

---

Für jeden fundamentalen Typ gibt es die Vergleichsoperatoren `==` und `!=`, aber *nicht* für Structs! Warum?

- Mitgliedsweiser Vergleich ergibt im allgemeinen keinen Sinn,...
- ...denn dann wäre z.B.  $2/3 \neq 4/6$



# Benutzerdefinierte Operatoren

---

Anstatt

```
rational t = add (r, s);
```

würden wir lieber

```
rational t = r + s;
```

schreiben.



# Benutzerdefinierte Operatoren

---

Anstatt

```
rational t = add (r, s);
```

würden wir lieber

```
rational t = r + s;
```

schreiben.

Dies geht mit *Operator-Überladung*.



# Funktions- und Operator- Überladung

---

*Verschiedene* Funktionen können den  
*gleichen* Namen haben.



# Funktions- und Operator- Überladung

---

*Verschiedene* Funktionen können den *gleichen* Namen haben.

```
// POST: returns a * a  
rational square (rational a);
```

```
// POST: returns a * a  
extended_int square (extended_int a);
```



# Funktions- und Operator-Überladung

---

*Verschiedene* Funktionen können den *gleichen* Namen haben.

```
// POST: returns a * a  
rational square (rational a);
```

```
// POST: returns a * a  
extended_int square (extended_int a);
```

Der Compiler findet anhand der Aufruf-Argumente heraus, welche gemeint ist.



# Operator-Überladung

---

- Operatoren sind spezielle Funktionen und können auch überladen werden





# Operator-Überladung

---

- Operatoren sind spezielle Funktionen und können auch überladen werden
- Name des Operators *op* :

`operator op`



# Operator-Überladung

---

- Operatoren sind spezielle Funktionen und können auch überladen werden
- Name des Operators *op* :

`operator op`

- wir wissen schon, dass z.B. `operator+` für verschiedene Typen existiert

# Additionsoperator für rationale Zahlen

Bisher:

```
// POST: return value is the sum of a and b
rational add (const rational a, const rational b)
{
    rational result;
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    result.d = a.d * b.d;
    return result;
}
...
const rational t = add (r, s);
```

# Additionsoperator für rationale Zahlen

Neu:

```
// POST: return value is the sum of a and b  
rational operator+
```

```
    (const rational a, const rational b)
```

```
{
```

```
    rational result;
```

```
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
```

```
    result.d = a.d * b.d;
```

```
    return result;
```

```
}
```

```
...
```

```
const rational t = r + s;
```

# Additionsoperator für rationale Zahlen

Neu:

```
// POST: return value is the sum of a and b  
rational operator+
```

```
(const rational a, const rational b)
```

```
{
```

```
    rational result;
```

```
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
```

```
    result.d = a.d * b.d;
```

```
    return result;
```

```
}
```

```
...
```

```
const rational t = r + s;
```

Infix-Notation



# Additionsoperator für rationale Zahlen

Neu:

```
// POST: return value is the sum of a and b  
rational operator+
```

```
(const rational a, const rational b)
```

```
{
```

```
    rational result;
```

```
    result.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
```

```
    result.d = a.d * b.d;
```

```
    return result;
```

```
} Äquivalent, aber unpraktisch: funktionale Notation
```

```
...
```

```
const rational t = operator+ (r, s);
```



# Andere binäre arithmetische Operatoren für rationale Zahlen

---

```
// POST: return value is the difference of a and b  
rational operator- (rational a, rational b);
```

```
// POST: return value is the product of a and b  
rational operator* (rational a, rational b);
```

```
// POST: return value is the quotient of a and b  
// PRE: b != 0  
rational operator/ (rational a, rational b);
```



# Unäres Minus

---

Hat gleiches Symbol wie binäres Minus,  
aber nur *ein* Argument:

```
// POST: return value is -a
rational operator- (rational a)
{
    a.n = -a.n;
    return a;
}
```





# Relationale Operatoren

---

Sind für Structs nicht "eingebaut", können aber definiert werden:

```
// POST: return value is true if and only if a == b
bool operator== (const rational a, const rational b)
{
    return a.n * b.d == a.d * b.n;
}
```



# Arithmetische Zuweisungen

---

Wir wollen z.B. schreiben:

```
rational r;  
r.n = 1; r.d = 2; // 1/2
```

```
rational s;  
s.n = 1; s.d = 3; // 1/3
```

```
r += s;  
std::cout << r.n << "/" << r.d << "\n"; // 5/6
```



# Arithmetische Zuweisungen

---

Wir wollen z.B. schreiben:

```
rational r;  
r.n = 1; r.d = 2; // 1/2
```

```
rational s;  
s.n = 1; s.d = 3; // 1/3
```

```
r += s;  
std::cout << r.n << "/" << r.d << "\n"; // 5/6
```

operator+=





# Das Problem mit `operator+=`

---

Erster Versuch:

```
rational operator+=
    (rational a, const rational b)
{
    a.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    a.d *= b.d;
    return a;
}
```



# Das Problem mit `operator+=`

---

Erster Versuch:

```
rational operator+=  
    (rational a, const rational b)  
{  
    a.n = a.n * b.d + a.d * b.n;  
    a.d *= b.d;  
    return a;  
}
```

Das funktioniert nicht!



# Das Problem mit `operator+=`

---

Erster Versuch:

```
rational operator+=
    (rational a, const rational b)
{
    a.n = a.n * b.d + a.d * b.n;
    a.d *= b.d;
    return a;
}
```

Problem: Der Ausdruck `r += s` hat zwar den gewünschten *Wert* `r + s`, aber **nicht den gewünschten Effekt** der Veränderung von `r`, weil ein Funktionsaufruf die Werte der Aufrufargumente nicht ändert.

Das funktioniert nicht!



# Das Problem mit `operator+=`

---

- Wir müssen Funktionen in die Lage versetzen, die Werte ihrer Aufrufargumente ändern zu können!



# Das Problem mit `operator+=`

---

- Wir müssen Funktionen in die Lage versetzen, die Werte ihrer Aufrufargumente ändern zu können!
- Dazu brauchen wir kein neues Konzept auf der Funktionenseite, sondern eine neue Klasse von Typen.





# Das Problem mit `operator+=`

---

- Wir müssen Funktionen in die Lage versetzen, die Werte ihrer Aufrufargumente ändern zu können!
- Dazu brauchen wir kein neues Konzept auf der Funktionenseite, sondern eine **neue Klasse von Typen**.

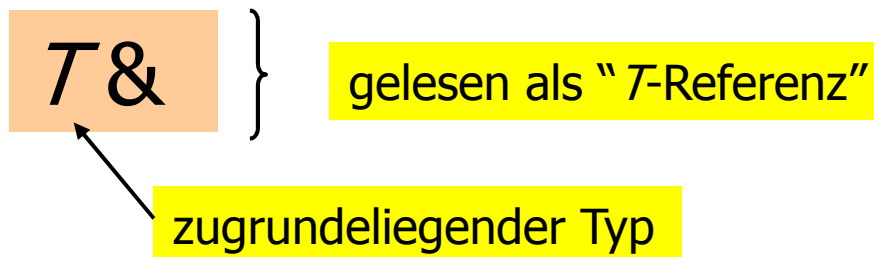


Referenztypen



# Referenztypen: Definition

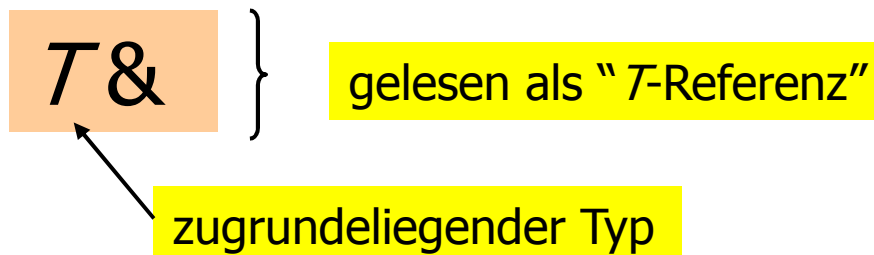
---





# Referenztypen: Definition

---

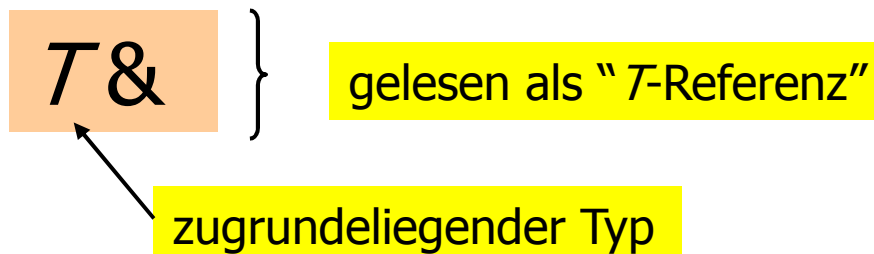


- $T\&$  hat gleichen Wertebereich und gleiche Funktionalität wie  $T, \dots$



# Referenztypen: Definition

---



- $T\&$  hat gleichen Wertebereich und gleiche Funktionalität wie  $T, \dots$
- ... nur die Initialisierungs- und Zuweisungssemantik ist anders.



# Referenztypen: Initialisierung

---

- Eine Variable mit Referenztyp (eine *Referenz*) kann nur mit einem L-Wert initialisiert werden
- die Variable wird dabei ein *Alias* des L-Werts (ein anderer Name für das Objekt hinter dem L-Wert)



# Referenztypen: Initialisierung und Zuweisung

---

## Beispiel:

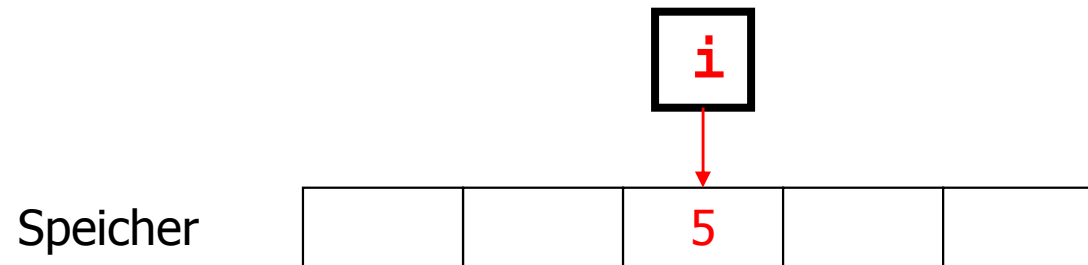
```
int i = 5;
int& j = i;           // j becomes an alias of i

j = 6;                // changes the value of i
std::cout << i << "\n"; // outputs 6
```

# Referenztypen: Initialisierung und Zuweisung

## Beispiel:

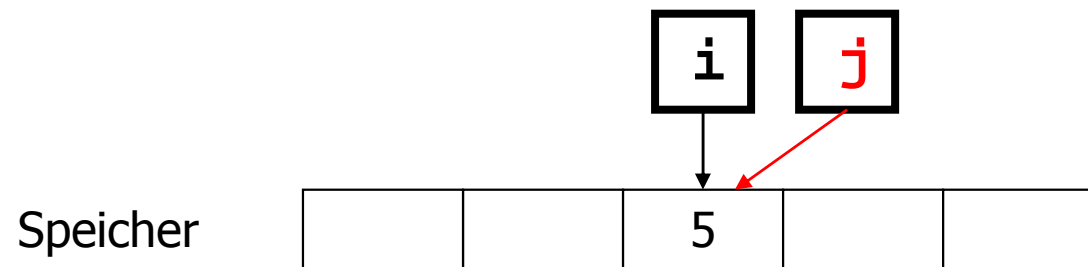
```
int i = 5;  
int& j = i;           // j becomes an alias of i  
  
j = 6;               // changes the value of i  
std::cout << i << "\n"; // outputs 6
```



# Referenztypen: Initialisierung

## Beispiel:

```
int i = 5;  
int& j = i;           // j becomes an alias of i  
  
j = 6;               // changes the value of i  
std::cout << i << "\n"; // outputs 6
```

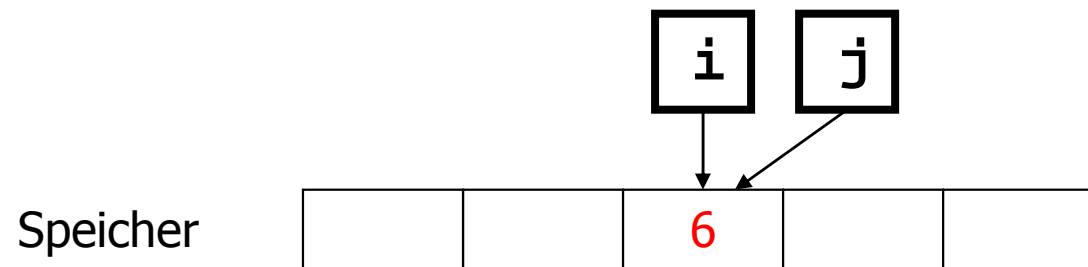




# Referenztypen: Zuweisung

## Beispiel:

```
int i = 5;  
int& j = i;           // j becomes an alias of i  
  
j = 6;               // changes the value of i  
std::cout << i << "\n"; // outputs 6
```

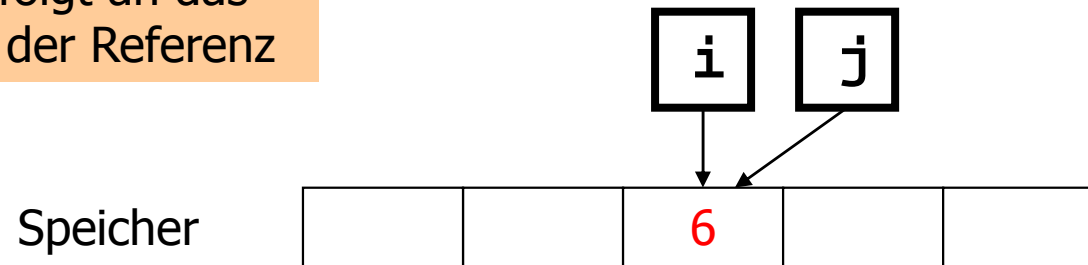


# Referenztypen: Zuweisung

## Beispiel:

```
int i = 5;  
int& j = i;           // j becomes an alias of i  
  
j = 6;               // changes the value of i  
std::cout << i << "\n"; // outputs 6
```

Zuweisung erfolgt an das  
Objekt hinter der Referenz



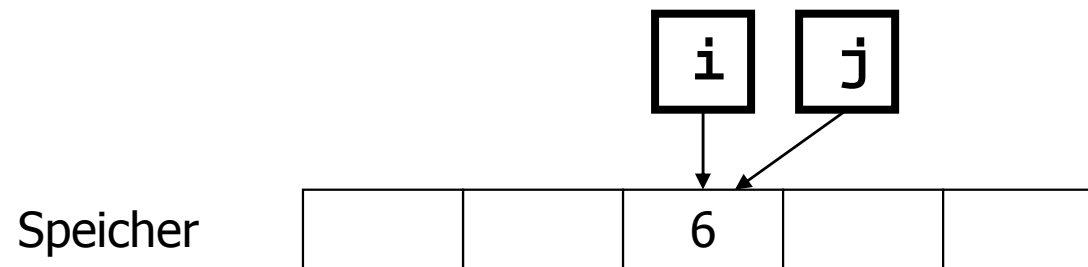
# Referenzen sind implizite Zeiger (aber einfacher und sicherer)

Mit Referenzen:

```
int i = 5;  
int& j = i;  
  
j = 6;  
std::cout << i << "\n";
```

Mit Zeigern:

```
int i = 5;  
int* j = &i;  
  
*j = 6;  
std::cout << i << "\n";
```





# Referenztypen: Realisierung

---

- Intern wird ein Wert vom Typ  $T$  & durch die Adresse eines Objekts vom Typ  $T$  repräsentiert



# Referenztypen: Realisierung

---

- o Intern wird ein Wert vom Typ  $T&$  durch die Adresse eines Objekts vom Typ  $T$  repräsentiert

```
int& j;          // error: j must be an alias of something
int& k = 5;     // error: the literal 5 has no address
```



# *Call by Reference*

---

- Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufargumente zu ändern:

```
void increment (int& i)
{
    ++i;
}

int main ()
{
    int j = 5;
    increment (j);
    std::cout << j << "\n"; // outputs 6

    return 0;
}
```



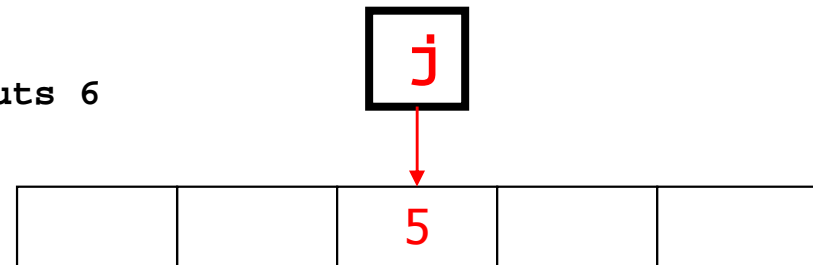
# *Call by Reference*

- o Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufargumente zu ändern:

```
void increment (int& i)
{
    ++i;
}

int main ()
{
    int j = 5;
    increment (j);
    std::cout << j << "\n"; // outputs 6

    return 0;
}
```





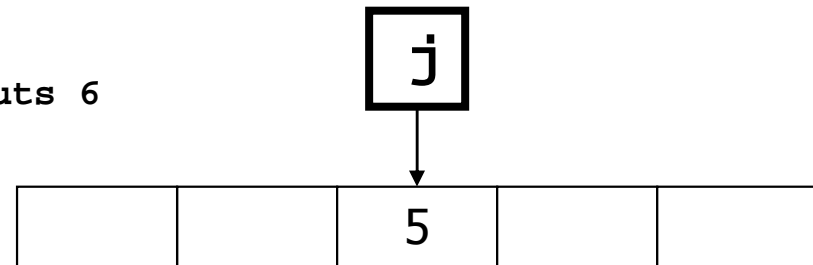
# *Call by Reference*

- o Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufargumente zu ändern:

```
void increment (int& i)
{
    ++i;
}

int main ()
{
    int j = 5;
    increment (j);
    std::cout << j << "\n"; // outputs 6

    return 0;
}
```





# Call by Reference

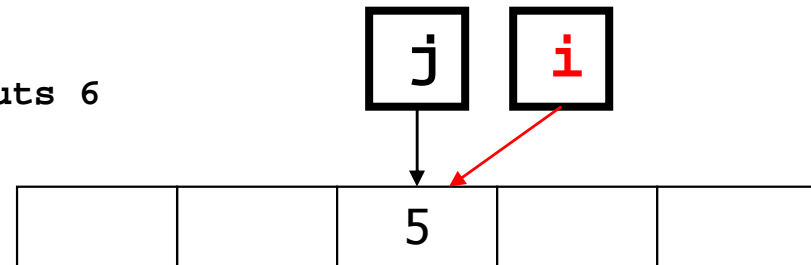
- Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufargumente zu ändern:

```
void increment (int& i)
{ // i becomes alias of call argument
  ++i;
}
```

Initialisierung der formalen Parameter

```
int main ()
{
  int j = 5;
  increment (j);
  std::cout << j << "\n"; // outputs 6

  return 0;
}
```





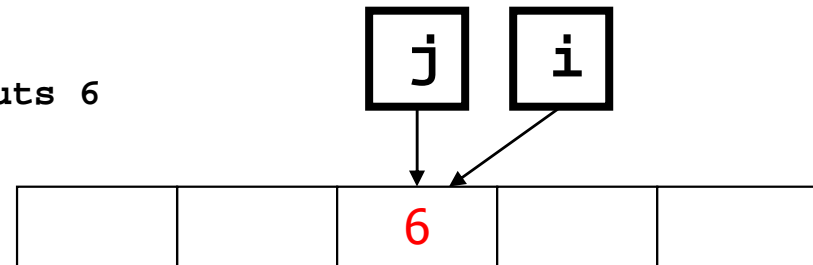
# *Call by Reference*

- o Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufargumente zu ändern:

```
void increment (int& i)
{ // i becomes alias of call argument
  ++i;
}

int main ()
{
  int j = 5;
  increment (j);
  std::cout << j << "\n"; // outputs 6

  return 0;
}
```





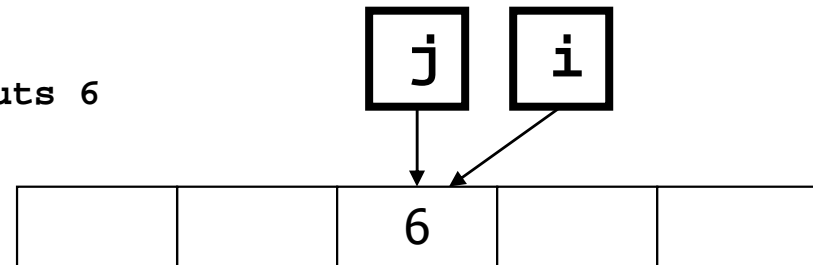
# *Call by Reference*

- o Referenztypen erlauben Funktionen, die Werte ihre Aufrufparameter zu ändern:

```
void increment (int& i)
{ // i becomes alias of call parameter
  ++i;
}

int main ()
{
  int j = 5;
  increment (j);
  std::cout << j << "\n"; // outputs 6

  return 0;
}
```





## *Call by Value / Reference*

---

- o formales Argument hat Referenztyp:  
*call by reference*

formales Argument wird (intern) mit der **Adresse** des Aufrufarguments (L-Wert) initialisiert und wird damit zu einem **Alias**



# *Call by Value / Reference*

---

- o formales Argument hat Referenztyp:  
*call by reference*

formales Argument wird (intern) mit der **Adresse** des Aufrufarguments (L-Wert) initialisiert und wird damit zu einem **Alias**

- o formales Argument hat keinen Referenztyp:  
*call by value*

formales Argument wird mit dem **Wert** des Aufrufparameters (R-Wert) initialisiert und wird damit zu einer **Kopie**



## *Return by Value / Reference*

---

- Auch der Rückgabebetyp einer Funktion kann ein Referenztyp sein (*return by reference*)
- In diesem Fall ist der Funktionsausfruf selbst ein L-Wert



## *Return by Value / Reference*

---

- Auch der Rückgabebetyp einer Funktion kann ein Referenztyp sein (*return by reference*)
- In diesem Fall ist der Funktionsaufruf selbst ein L-Wert

```
int& increment (int& i)
{
    return ++i;
}
```

exakt die Semantik des Prä-Inkremments:



# Die Lösung für `operator+=`

---

Bisher (funktioniert nicht):

```
rational operator+=  
    (rational a, const rational b)  
{  
    a.n = a.n * b.d + a.d * b.n;  
    a.d *= b.d;  
    return a;  
}
```





# Die Lösung für `operator+=`

---

Neu:

```
// POST: b has been added to a;  
//      return value is the new value of a  
rational& operator+=  
    (rational& a, const rational b)  
{  
    a.n = a.n * b.d + a.d * b.n;  
    a.d *= b.d;  
    return a;  
}
```

Der L-Wert a wird um den Wert von b inkrementiert und als L-Wert zurückgegeben



# Ein-/Ausgabeoperatoren

---

- o können auch überladen werden!

Bisher:

```
std::cout << "Sum is " << t.n << "/" << t.d << "\n";
```



# Ein-/Ausgabeoperatoren

---

- o können auch überladen werden!

Bisher:

```
std::cout << "Sum is " << t.n << "/" << t.d << "\n";
```

Neu (gewünscht):

```
std::cout << "Sum is " << t << "\n";
```



# Ein-/Ausgabeoperatoren

---

- o können auch überladen werden!

Das kann wie folgt erreicht werden:

```
// POST: a has been written to o
std::ostream& operator<<
    (std::ostream& o, const rational r)
{
    return o << r.n << "/" << r.d;
}
```



# Ein-/Ausgabeoperatoren

---

- können auch überladen werden!

Das kann wie folgt erreicht werden:

```
// POST: r has been written to o
std::ostream& operator<<
    (std::ostream& o, const rational r)
{
    return o << r.n << "/" << r.d;
}
```

schreibt `r` auf den Ausgabestrom `o` und gibt diesen als L-Wert zurück



# Ein-/Ausgabeoperatoren

---

- o können auch überladen werden!

```
// PRE: i starts with a rational number of the form
//      "n/d"
// POST: r has been read from i
std::istream& operator>>
    (std::istream& i, rational& r)
{
    char c; // separating character '/'
    return i >> r.n >> c >> r.d;
}
```

liest `r` aus dem Eingabestrom `i` und gibt diesen als L-Wert zurück



# Zwischenziel erreicht!

---

```
int main ()
{
    // input
    std::cout << "Rational number r:\n";
    ifm::rational r;
    std::cin >> r;

    std::cout << "Rational number s:\n";
    ifm::rational s;
    std::cin >> s;

    // computation and output
    std::cout << "Sum is " << r + s << ".\n";

    return 0;
}
```

# Zwischenziel erreicht!

```
int main ()
{
    // input
    std::cout << "Rational number r:\n";
    ifm::rational r;
    std::cin >> r;

    std::cout << "Rational number s:\n";
    ifm::rational s;
    std::cin >> s;

    // computation and output
    std::cout << "Sum is " << r + s << ".\n";

    return 0;
}
```

operator>>

operator+

operator<<