Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Die erwartete Höhe eines Treaps

B. Gärtner, E. Welzl

11. Dezember 2012

Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum

Sei

- Ω eine endliche Menge;
- $\Pr : \Omega \to \mathbf{R}$ eine Funktion, die jedem Element $\omega \in \Omega$ eine *Wahrscheinlichkeit* zuordnet.
  - $\Pr[\omega] \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$
  - $\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$
- $(\Omega, \Pr)$ ist ein *endlicher Wahrscheinlichkeitsraum*.

Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum

Sei

- Ω eine endliche Menge;
- $\Pr : \Omega \to \mathbf{R}$ eine Funktion, die jedem Element $\omega \in \Omega$ eine *Wahrscheinlichkeit* zuordnet.
  - $\Pr[\omega] \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$
  - $\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$
- $(\Omega, \Pr)$ ist ein *endlicher Wahrscheinlichkeitsraum*.

Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum

Sei

- Ω eine endliche Menge;
- $\mathrm{Pr} : \Omega \to \mathbf{R}$ eine Funktion, die jedem Element $\omega \in \Omega$ eine *Wahrscheinlichkeit* zuordnet.
  - $\Pr[\omega] \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$
  - $\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$
- (Ω, Pr) ist ein *endlicher Wahrscheinlichkeitsraum*.

Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum

Sei

- Ω eine endliche Menge;
- $\Pr : \Omega \to \mathbf{R}$ eine Funktion, die jedem Element $\omega \in \Omega$ eine *Wahrscheinlichkeit* zuordnet.
  - $\Pr[\omega] \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$
  - $\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$
- $(\Omega, \Pr)$ ist ein *endlicher Wahrscheinlichkeitsraum*.

Wahrscheinlichkeitsraum - roter und blauer Würfel

- Mögliche Würfelergebnisse:

$$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}.$$

(i: roter Würfel, j: blauer Würfel)

- Wahrscheinlichkeiten:

$$\Pr[(i,j)] = \frac{1}{36}, \quad 1 \leq i,j \leq 6.$$

Wahrscheinlichkeitsraum - roter und blauer Würfel

- Mögliche Würfelergebnisse:

$$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}.$$

(*i*: roter Würfel, *j*: blauer Würfel)

- Wahrscheinlichkeiten:

$$\Pr[(i,j)] = \frac{1}{36}, \quad 1 \leq i,j \leq 6.$$

Zufallsexperiment

Definition

Ein Zufallsexperiment über $(\Omega, \Pr)$ ist eine Prozedur, die beliebig oft wiederholt werden kann und jedes Mal ein *Ergebnis* (Element $\omega \in \Omega$) produziert.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis ω ist dabei $\Pr[\omega]$.

Zufallsexperiment

Definition

Ein Zufallsexperiment über $(\Omega, \Pr)$ ist eine Prozedur, die beliebig oft wiederholt werden kann und jedes Mal ein *Ergebnis* (Element $\omega \in \Omega$) produziert.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis ω ist dabei $\Pr[\omega]$.

Zufallsexperiment

Definition

Ein Zufallsexperiment über $(\Omega, \Pr)$ ist eine Prozedur, die beliebig oft wiederholt werden kann und jedes Mal ein *Ergebnis* (Element $\omega \in \Omega$) produziert.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis ω ist dabei $\Pr[\omega]$.

Vorstellung: Das Ergebnis wird aus einer Schale mit Kugeln gezogen; der Anteil der Kugeln mit Beschriftung ω ist $\Pr[\omega]$.

Zufallsexperiment - roter und blauer Würfel

Zufallsexperiment wird ausgeführt durch...

- Würfeln!

Zufallsexperiment - roter und blauer Würfel

Zufallsexperiment wird ausgeführt durch...

- Würfeln!

Ereignisse

Definition

- Ein *Ereignis* ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ des Wahrscheinlichkeitsraums.
- Die *Wahrscheinlichkeit von A* ist $\Pr[A] := \sum_{\omega \in A} \Pr[\omega]$.
- Für $\omega \in \Omega$ ist $\{\omega\}$ ein *Elementarereignis* und wird auch einfach als ω geschrieben.

$\Rightarrow$ Wenn $B_1, \ldots, B_k$ disjunkte Ereignisse sind, so gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \Pr[B_i].$$

Ereignisse

Definition

- Ein *Ereignis* ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ des Wahrscheinlichkeitsraums.
- Die *Wahrscheinlichkeit von A* ist $\Pr[A] := \sum_{\omega \in A} \Pr[\omega]$.
- Für $\omega \in \Omega$ ist $\{\omega\}$ ein *Elementarereignis* und wird auch einfach als ω geschrieben.

$\Rightarrow$ Wenn $B_1, \ldots, B_k$ disjunkte Ereignisse sind, so gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \Pr[B_i].$$

Ereignisse

Definition

- Ein *Ereignis* ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ des Wahrscheinlichkeitsraums.
- Die *Wahrscheinlichkeit von A* ist $\Pr[A] := \sum_{\omega \in A} \Pr[\omega]$.
- Für $\omega \in \Omega$ ist $\{\omega\}$ ein *Elementarereignis* und wird auch einfach als ω geschrieben.

$\Rightarrow$ Wenn $B_1, \ldots, B_k$ disjunkte Ereignisse sind, so gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \Pr[B_i].$$

Ereignisse

Definition

- Ein *Ereignis* ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ des Wahrscheinlichkeitsraums.
- Die *Wahrscheinlichkeit von A* ist $\Pr[A] := \sum_{\omega \in A} \Pr[\omega]$.
- Für $\omega \in \Omega$ ist $\{\omega\}$ ein *Elementarereignis* und wird auch einfach als ω geschrieben.

$\Rightarrow$ Wenn $B_1, \ldots, B_k$ disjunkte Ereignisse sind, so gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \Pr[B_i].$$

Ereignisse - roter und blauer Würfel

- Das Ereignis “Pasch” ist

$$A = \{(i, i) : 1 \leq i \leq 6\}$$

und hat Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[A] = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

- Das Ereignis  ist ein Elementarereignis.

Ereignisse - roter und blauer Würfel

- Sei B_i das Ereignis "roter Würfel zeigt i", $i = 1, 2, \ldots, 6$.
- Die Ereignissse B_i sind disjunkt, also gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} \Pr[B_1 \cup B_2] &= \Pr[\text{roter Würfel zeigt 1 oder 2}] \\ &= \Pr[B_1] + \Pr[B_2] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ereignisse - roter und blauer Würfel

- Sei B_i das Ereignis "roter Würfel zeigt i", $i = 1, 2, \ldots, 6$.
- Die Ereignissse B_i sind disjunkt, also gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} \Pr[B_1 \cup B_2] &= \Pr[\text{roter Würfel zeigt 1 oder 2}] \\ &= \Pr[B_1] + \Pr[B_2] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Zufallsvariablen

Definition

Sei $S = (\Omega, \Pr)$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbf{R}$ heisst *Zufallsvariable* über S.

Für eine reelle Zahl $r \in \mathbf{R}$ definieren wir das Ereignis

$$\{X = r\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = r\},$$

wobei wir die geschweiften Klammern in Ausdrücken oft weglassen, z.B. in $\Pr[X = r]$.

Zufallsvariablen

Definition

Sei $S = (\Omega, \Pr)$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbf{R}$ heisst *Zufallsvariable* über S.

Für eine reelle Zahl $r \in \mathbf{R}$ definieren wir das Ereignis

$$\{X = r\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = r\},$$

wobei wir die geschweiften Klammern in Ausdrücken oft weglassen, z.B. in $\Pr[X = r]$.

Zufallsvariablen - roter und blauer Würfel

Sei $X(i,j) = i + j$ die Summe beider Würfelaugen.

- Das Ereignis $\{X = 7\}$ ist

$$\{X = 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.$$

- Es hat Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[X = 7] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Zufallsvariablen - roter und blauer Würfel

Sei $X(i,j) = i + j$ die Summe beider Würfelaugen.

- Das Ereignis $\{X = 7\}$ ist

$$\{X = 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.$$

- Es hat Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[X = 7] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Erwartungswert

Definition

Der *Erwartungswert* einer Zufallsvariablen ist definiert als

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega].$$

Äquivalent,

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{r \in \mathbf{R}} r \cdot \Pr[X = r],$$

wobei diese Summe natürlich endlich ist.

Erwartungswert

Definition

Der *Erwartungswert* einer Zufallsvariablen ist definiert als

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega].$$

Äquivalent,

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{r \in \mathbf{R}} r \cdot \Pr[X = r],$$

wobei diese Summe natürlich endlich ist.

Erwartungswert - roter und blauer Würfel

Sei $X(i,j) = i + j$ die Summe beider Würfelaugen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j)\frac{1}{36} \\
&= \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}(6i+21) \\
&= \frac{1}{36}(6\cdot 21 + 6\cdot 21) = 7.
\end{aligned}$$

Das schwache Gesetz der grossen Zahlen

Was sagt $\mathbf{E}[X]$ über X aus?

- $\mathbf{E}[X]$ ist im allgemeinen nicht der "typische" oder "häufigste" Wert von X.
- Beispiel:

$$\Omega = \{0, 1\}, \quad \Pr[0] = \Pr[1] = 1/2, \quad X(\omega) = \omega.$$

Hier gilt $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{2}$, ein recht untypischer und eher seltener Wert von X.

Das schwache Gesetz der grossen Zahlen

Was sagt $\mathbf{E}[X]$ über X aus?

- $\mathbf{E}[X]$ ist im allgemeinen nicht der “typische” oder “häufigste” Wert von X.
- Beispiel:

$$\Omega = \{0,1\}, \quad \Pr[0] = \Pr[1] = 1/2, \quad X(\omega) = \omega.$$

Hier gilt $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{2}$, ein recht untypischer und eher seltener Wert von X.

Das schwache Gesetz der grossen Zahlen

Was sagt $\mathbf{E}[X]$ über X aus?

- $\mathbf{E}[X]$ ist im allgemeinen nicht der "typische" oder "häufigste" Wert von X.
- Beispiel:

$$\Omega = \{0,1\}, \quad \Pr[0] = \Pr[1] = 1/2, \quad X(\omega) = \omega.$$

Hier gilt $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{2}$, ein recht untypischer und eher seltener Wert von X.

Das schwache Gesetz der grossen Zahlen

Theorem

Seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die Ergebnisse n unabhängiger Zufallsexperimente über $(\Omega, \Pr)$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) \rightarrow_{n \to \infty} \mathbf{E}[X].$$

Das heisst, der durschnittliche Wert von X über viele Experimente konvergiert gegen den Erwartungswert.

Das schwache Gesetz der grossen Zahlen - roter und blauer Würfel

Nach einer Million mal würfeln (Computer):

- Durschnittliche Augenzahl $7.04 \approx \mathbf{E}[X] = 7$.

Linearität des Erwartungswerts

Theorem

Seien X_1, X_2 zwei Zufallsvariablen über $S = (\Omega, \Pr)$. Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2],$$

wobei $X_1 + X_2$ die Zufallsvariable ist, die durch $(X_1 + X_2)(\omega) := X_1(\omega) + X_2(\omega)$ definiert ist.

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_1 + X_2] &= \sum_{\omega\in\Omega}(X_1 + X_2)(\omega)\Pr[\omega] = \sum_{\omega\in\Omega}(X_1(\omega) + X_2(\omega))\Pr[\omega] \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} X_1(\omega)\Pr[\omega] + \sum_{\omega\in\Omega} X_2(\omega)\Pr[\omega] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2].\end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswerts

Theorem

Seien X_1, X_2 *zwei Zufallsvariablen über* $S = (\Omega, \Pr)$. *Dann gilt*

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2],$$

wobei $X_1 + X_2$ *die Zufallsvariable ist, die durch* $(X_1 + X_2)(\omega) := X_1(\omega) + X_2(\omega)$ *definiert ist.*

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_1 + X_2] &= \sum_{\omega\in\Omega}(X_1 + X_2)(\omega)\Pr[\omega] = \sum_{\omega\in\Omega}(X_1(\omega) + X_2(\omega))\Pr[\omega] \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} X_1(\omega)\Pr[\omega] + \sum_{\omega\in\Omega} X_2(\omega)\Pr[\omega] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2].\end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswerts - roter und blauer Würfel

- Definiere Zufallsvariablen X_1, X_2 durch

$$X_1(i,j) = i, \quad X_2(i,j) = j.$$

- $X = X_1 + X_2$ ist die Summe der Augenzahlen, mit $\mathbf{E}[X] = 7$.
- Es gilt

$$\{X_1 = i\} = \{(i,j) : 1 \leq j \leq 6\},$$

also

$$\Pr[X_1 = i] = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{E}[X_1] = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{21}{6}.$$

Linearität des Erwartungswerts - roter und blauer Würfel

- Definiere Zufallsvariablen X_1, X_2 durch

$$X_1(i,j) = i, \quad X_2(i,j) = j.$$

- $X = X_1 + X_2$ ist die Summe der Augenzahlen, mit $\mathbf{E}[X] = 7$.
- Es gilt

$$\{X_1 = i\} = \{(i,j) : 1 \leq j \leq 6\},$$

also

$$\Pr[X_1 = i] = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{E}[X_1] = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{21}{6}.$$

Linearität des Erwartungswerts - roter und blauer Würfel

- Definiere Zufallsvariablen X_1, X_2 durch

$$X_1(i,j) = i, \quad X_2(i,j) = j.$$

- $X = X_1 + X_2$ ist die Summe der Augenzahlen, mit $\mathbf{E}[X] = 7$.
- Es gilt

$$\{X_1 = i\} = \{(i,j) : 1 \leq j \leq 6\},$$

also

$$\Pr[X_1 = i] = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{E}[X_1] = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{21}{6}.$$

Linearität des Erwartungswerts - roter und blauer Würfel

- Für X_2 analog:

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{j=1}^{6} j\frac{1}{6} = \frac{21}{6}.$$

- Linearität:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = \frac{42}{6} = 7.$$

Linearität des Erwartungswerts - roter und blauer Würfel

- Für X_2 analog:

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{j=1}^{6} j\frac{1}{6} = \frac{21}{6}.$$

- Linearität:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = \frac{42}{6} = 7.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition

Seien $A, B \subseteq \Omega$ zwei Ereignisse, $B \neq \emptyset$. Die Wahrscheinlichkeit von A, *gegeben* B, ist

$$\Pr[A \mid B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

Bemerkung: Es gilt $\sum_{\omega \in B} \Pr[\omega \mid B] = 1$, also definiert die *bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion* $\Pr_B : B \to \mathbf{R}$, mit

$$\Pr_B[\omega] = \Pr[\omega \mid B]$$

einen *bedingten* Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \Pr_B)$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition

Seien $A, B \subseteq \Omega$ zwei Ereignisse, $B \neq \emptyset$. Die Wahrscheinlichkeit von A, *gegeben* B, ist

$$\Pr[A \mid B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

Bemerkung: Es gilt $\sum_{\omega \in B} \Pr[\omega \mid B] = 1$, also definiert die *bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion* $\Pr_B : B \to \mathbf{R}$, mit

$$\Pr_B[\omega] = \Pr[\omega \mid B]$$

einen *bedingten* Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \Pr_B)$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit - roter und blauer Würfel

Was ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu würfeln (Ereignis A), gegeben, dass wir keine 6 würfeln (Ereignis B)?

- Es gilt $A \cap B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$, also $\Pr[A \cap B] = 5/36$.
- $\Pr[B] = 1 - \Pr[C]$, wobei C das Ereignis "6 gewürfelt" ist: $C = \{(1,6),\dots,(5,6),(6,6),(6,5),\dots,(6,1)\}$, also $\Pr[C] = 11/36$ and $\Pr[B] = 25/36$.
- Es folgt:

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{25} = \frac{1}{5}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit - roter und blauer Würfel

Was ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu würfeln (Ereignis A), gegeben, dass wir keine 6 würfeln (Ereignis B)?

- Es gilt $A \cap B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$, also $\Pr[A \cap B] = 5/36$.
- $\Pr[B] = 1 - \Pr[C]$, wobei C das Ereignis "6 gewürfelt" ist: $C = \{(1,6),\ldots,(5,6),(6,6),(6,5),\ldots,(6,1)\}$, also $\Pr[C] = 11/36$ and $\Pr[B] = 25/36$.
- Es folgt:

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{25} = \frac{1}{5}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit - roter und blauer Würfel

Was ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu würfeln (Ereignis A), gegeben, dass wir keine 6 würfeln (Ereignis B)?

- Es gilt $A \cap B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$, also $\Pr[A \cap B] = 5/36$.
- $\Pr[B] = 1 - \Pr[C]$, wobei C das Ereignis “6 gewürfelt” ist: $C = \{(1,6),\ldots,(5,6),(6,6),(6,5),\ldots,(6,1)\}$, also $\Pr[C] = 11/36$ and $\Pr[B] = 25/36$.
- Es folgt:

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{25} = \frac{1}{5}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit - roter und blauer Würfel

Was ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu würfeln (Ereignis A), gegeben, dass wir keine 6 würfeln (Ereignis B)?

- Es gilt $A \cap B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$, also $\Pr[A \cap B] = 5/36$.
- $\Pr[B] = 1 - \Pr[C]$, wobei C das Ereignis "6 gewürfelt" ist: $C = \{(1,6),\ldots,(5,6),(6,6),(6,5),\ldots,(6,1)\}$, also $\Pr[C] = 11/36$ and $\Pr[B] = 25/36$.
- Es folgt:

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{25} = \frac{1}{5}.$$

Theorem

Wenn $B_1, \ldots, B_k$ eine Partition von Ω bilden, dann gilt

$$\Pr[A] = \sum_{i=1}^{k} \Pr[A \mid B_i] \Pr[B_i],$$

für jedes Ereignis A.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{k} \Pr[A \mid B_i] \Pr[B_i] = \sum_{i=1}^{k} \Pr[A \cap B_i] = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i)\right] = \Pr[A].$$

Theorem

Wenn $B_1, \ldots, B_k$ eine Partition von Ω bilden, dann gilt

$$\Pr[A] = \sum_{i=1}^{k} \Pr[A \mid B_i] \Pr[B_i],$$

für jedes Ereignis A.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{k} \Pr[A \mid B_i] \Pr[B_i] = \sum_{i=1}^{k} \Pr[A \cap B_i] = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i)\right] = \Pr[A].$$

Totale Wahrscheinlichkeit - roter und blauer Würfel

Was ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu würfeln, gegeben, dass wir (mindestens) eine 6 würfeln?

- $A =$ "Pasch", $B_1 =$ "keine 6 gewürfelt", $B_2 =$ "mindestens eine 6 gewürfelt"
- $\Pr[A \mid B_1] = \frac{1}{5}$, $\Pr[B_1] = \frac{25}{36}$, $\Pr[B_2] = \frac{11}{36}$, $\Pr[A] = \frac{1}{6}$.
- Es folgt:

$$\Pr[A \mid B_2] = \frac{\Pr[A] - \Pr[A \mid B_1]\Pr[B_1]}{\Pr[B_2]} = \frac{1}{11}.$$

Totale Wahrscheinlichkeit - roter und blauer Würfel

Was ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu würfeln, gegeben, dass wir (mindestens) eine 6 würfeln?

- $A =$ "Pasch", $B_1 =$ "keine 6 gewürfelt", $B_2 =$ "mindestens eine 6 gewürfelt"
- $\Pr[A \mid B_1] = \frac{1}{5}$, $\Pr[B_1] = \frac{25}{36}$, $\Pr[B_2] = \frac{11}{36}$, $\Pr[A] = \frac{1}{6}$.
- Es folgt:

$$\Pr[A \mid B_2] = \frac{\Pr[A] - \Pr[A \mid B_1]\Pr[B_1]}{\Pr[B_2]} = \frac{1}{11}.$$

Totale Wahrscheinlichkeit - roter und blauer Würfel

Was ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu würfeln, gegeben, dass wir (mindestens) eine 6 würfeln?

- $A =$ "Pasch", $B_1 =$ "keine 6 gewürfelt", $B_2 =$ "mindestens eine 6 gewürfelt"
- $\Pr[A \mid B_1] = \frac{1}{5}$, $\Pr[B_1] = \frac{25}{36}$, $\Pr[B_2] = \frac{11}{36}$, $\Pr[A] = \frac{1}{6}$.
- Es folgt:

$$\Pr[A \mid B_2] = \frac{\Pr[A] - \Pr[A \mid B_1]\Pr[B_1]}{\Pr[B_2]} = \frac{1}{11}.$$

Bedingter Erwartungswert

Definition

Sei X eine Zufallsvariable und B ein nichtleeres Ereignis. Der Erwartungswert von X, *gegeben* B, ist

$$\mathbf{E}[X \mid B] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega \mid B] = \sum_{\omega \in B} X(\omega) \Pr_B[\omega]$$

Bemerkung: $\mathbf{E}[X \mid B]$ ist also der "normale" Erwartungswert von $X|_B$ (Einschränkung von X auf B) über dem bedingten Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \Pr_B)$.

Bedingter Erwartungswert

Definition

Sei X eine Zufallsvariable und B ein nichtleeres Ereignis. Der Erwartungswert von X, *gegeben* B, ist

$$\mathbf{E}[X \mid B] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega \mid B] = \sum_{\omega \in B} X(\omega) \Pr_B[\omega]$$

Bemerkung: $\mathbf{E}[X \mid B]$ ist also der "normale" Erwartungswert von $X|_B$ (Einschränkung von X auf B) über dem bedingten Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \Pr_B)$.

Bedingter Erwartungswert - roter und blauer Würfel

Was ist die erwartete Augenzahl, gegeben, dass die beiden Würfel sich um genau 1 unterscheiden?

- $B = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)\}$.
- Für alle $\omega \in B$ gilt

$$\Pr_B[\omega] = \Pr[\omega \mid B] = \frac{\Pr[\omega]}{\Pr[B]} = \frac{1/36}{10/36} = \frac{1}{10}.$$

Bedingter Erwartungswert - roter und blauer Würfel

Was ist die erwartete Augenzahl, gegeben, dass die beiden Würfel sich um genau 1 unterscheiden?

- $B = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)\}$.
- Für alle $\omega \in B$ gilt

$$\Pr_B[\omega] = \Pr[\omega \mid B] = \frac{\Pr[\omega]}{\Pr[B]} = \frac{1/36}{10/36} = \frac{1}{10}.$$

Bedingter Erwartungswert - roter und blauer Würfel

Was ist die erwartete Augenzahl, gegeben, dass die beiden Würfel sich um genau 1 unterscheiden?

- Also

$$\mathbf{E}[X \mid B] = \sum_{i=1}^{5} (2i+1)\frac{1}{10} + \sum_{j=1}^{5} (2j+1)\frac{1}{10} = 7.$$

Bedingter Erwartungswert - roter und blauer Würfel

Was ist die erwartete Augenzahl, gegeben, dass die beiden Würfel sich um genau 1 unterscheiden?

- Also

$$\mathbf{E}[X \mid B] = \sum_{i=1}^{5}(2i+1)\frac{1}{10} + \sum_{j=1}^{5}(2j+1)\frac{1}{10} = 7.$$

- Es kommt auch 7 heraus, gegeben, dass die beiden Würfel sich um eine feste Zahl unterscheiden.

Bedingter Erwartungswert - roter und blauer Würfel

Was ist die erwartete Augenzahl, gegeben, dass die beiden Würfel sich um genau 1 unterscheiden?

- Also

$$\mathbf{E}[X \mid B] = \sum_{i=1}^{5} (2i+1)\frac{1}{10} + \sum_{j=1}^{5} (2j+1)\frac{1}{10} = 7.$$

- Interpretation: Selbst wenn Ihr Kollege, der verdeckt wüfelt, Ihnen stets die Differenz der beiden Würfel nennt, können Sie langfristig keine bessere Vorhersage machen als 7.

Totaler Erwartungswert

Definition

Wenn $B_1, \ldots, B_k$ eine Partition von Ω bilden, dann gilt für jede Zufallsvariable X:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}[X \mid B_i] \Pr[B_i].$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}[X \mid B_i] \Pr[B_i] = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega \mid B_i] \right) \Pr[B_i]$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \sum_{i=1}^{k} \Pr[\omega \mid B_i] \Pr[B_i] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega] = \mathbf{E}[X].$$

Totaler Erwartungswert

Definition

Wenn $B_1, \ldots, B_k$ eine Partition von Ω bilden, dann gilt für jede Zufallsvariable X:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}[X \mid B_i] \Pr[B_i].$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}[X \mid B_i] \Pr[B_i] = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega \mid B_i] \right) \Pr[B_i]$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \sum_{i=1}^{k} \Pr[\omega \mid B_i] \Pr[B_i] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\omega] = \mathbf{E}[X].$$

Totaler Erwartungswert - roter und blauer Würfel

Sei $X(i,j) = ij$ das Produkt der beiden Augenzahlen, B_i das Ereignis "roter Würfel zeigt i".

$$B_i = \{(i,j) : 1 \leq j \leq 6\}; \quad \Pr[B_i] = \frac{1}{6}.$$

- $\mathbf{E}[X \mid B_i] = \sum_{j=1}^{6} ij \underbrace{\Pr[(i,j) \mid B_i]}_{1/6} = \frac{21i}{6}.$
- $\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{E}[X \mid B_i] \Pr[B_i] = \sum_{i=1}^{6} \frac{21i}{6} \frac{1}{6} = \frac{21 \cdot 21}{36} = \frac{49}{4}.$

Totaler Erwartungswert - roter und blauer Würfel

Sei $X(i,j) = ij$ das Produkt der beiden Augenzahlen, B_i das Ereignis "roter Würfel zeigt i".

$$B_i = \{(i,j) : 1 \le j \le 6\}; \quad \Pr[B_i] = \frac{1}{6}.$$

- $\mathbf{E}[X \mid B_i] = \sum_{j=1}^{6} ij \underbrace{\Pr[(i,j) \mid B_i]}_{1/6} = \frac{21i}{6}.$
- $\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{E}[X \mid B_i] \Pr[B_i] = \sum_{i=1}^{6} \frac{21i}{6} \frac{1}{6} = \frac{21 \cdot 21}{36} = \frac{49}{4}.$

Markov-Ungleichung

Definition

Sei X eine *nichtnegative* Zufallsvariable (d.h. $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$). Dann gilt

$$\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]] < \frac{1}{t}, \quad t \geq 1.$$

Beweis: $B_1 = \{X > t\,\mathbf{E}[X]\}$ und $B_2 = \{X \leq t\,\mathbf{E}[X]\}$. Nach dem Satz vom totalem Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}[X \mid B_1]\Pr[B_1] + \mathbf{E}[X \mid B_2]\Pr[B_2] \\ &> t\,\mathbf{E}[X]\Pr[B_1] + 0 = t\,\mathbf{E}[X]\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]]. \end{aligned}$$

Umformen: $\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]] < \frac{1}{t}$.

Markov-Ungleichung

Definition

Sei X eine *nichtnegative* Zufallsvariable (d.h. $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$). Dann gilt

$$\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]] < \frac{1}{t}, \quad t \geq 1.$$

Beweis: $B_1 = \{X > t\,\mathbf{E}[X]\}$ und $B_2 = \{X \leq t\,\mathbf{E}[X]\}$. Nach dem Satz vom totalem Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}[X \mid B_1]\Pr[B_1] + \mathbf{E}[X \mid B_2]\Pr[B_2] \\ &> t\,\mathbf{E}[X]\Pr[B_1] + 0 = t\,\mathbf{E}[X]\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]].\end{aligned}$$

Umformen: $\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]] < \frac{1}{t}$.

Markov-Ungleichung

Definition

Sei X eine *nichtnegative* Zufallsvariable (d.h. $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$). Dann gilt

$$\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]] < \frac{1}{t}, \quad t \geq 1.$$

Beweis: $B_1 = \{X > t\,\mathbf{E}[X]\}$ und $B_2 = \{X \leq t\,\mathbf{E}[X]\}$. Nach dem Satz vom totalem Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}[X \mid B_1]\Pr[B_1] + \mathbf{E}[X \mid B_2]\Pr[B_2] \\ &> t\,\mathbf{E}[X]\Pr[B_1] + 0 = t\,\mathbf{E}[X]\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]]. \end{aligned}$$

Umformen: $\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]] < \frac{1}{t}$.

Markov-Ungleichung

Definition

Sei X eine *nichtnegative* Zufallsvariable (d.h. $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$). Dann gilt

$$\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]] < \frac{1}{t}, \quad t \geq 1.$$

Beweis: $B_1 = \{X > t\,\mathbf{E}[X]\}$ und $B_2 = \{X \leq t\,\mathbf{E}[X]\}$. Nach dem Satz vom totalem Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}[X \mid B_1]\Pr[B_1] + \mathbf{E}[X \mid B_2]\Pr[B_2] \\ &> t\,\mathbf{E}[X]\Pr[B_1] + 0 = t\,\mathbf{E}[X]\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]].\end{aligned}$$

Umformen: $\Pr[X > t\,\mathbf{E}[X]] < \frac{1}{t}$.

Markov-Ungleichung - roter und blauer Würfel

Die Wahrscheinlichkeit, 10 oder mehr Augen zu würfeln, beträgt für alle $\varepsilon > 0$ höchstens

$$\Pr\left[X > \frac{10-\varepsilon}{7} \cdot 7\right] < \frac{7}{10-\varepsilon}.$$

Also

$$\Pr[X \geq 10] \leq \frac{7}{10}.$$

Das ist nicht die bestmögliche Schranke; die Markov-Ungleichung ist meistens nicht “scharf”.

Markov-Ungleichung - roter und blauer Würfel

Die Wahrscheinlichkeit, 10 oder mehr Augen zu würfeln, beträgt für alle $\varepsilon > 0$ höchstens

$$\Pr\left[X > \frac{10-\varepsilon}{7} \cdot 7\right] < \frac{7}{10-\varepsilon}.$$

Also

$$\Pr[X \geq 10] \leq \frac{7}{10}.$$

Das ist nicht die bestmögliche Schranke; die Markov-Ungleichung ist meistens nicht "scharf".

Markov-Ungleichung - roter und blauer Würfel

Die Wahrscheinlichkeit, 10 oder mehr Augen zu würfeln, beträgt für alle $\varepsilon > 0$ höchstens

$$\Pr\left[X > \frac{10-\varepsilon}{7} \cdot 7\right] < \frac{7}{10-\varepsilon}.$$

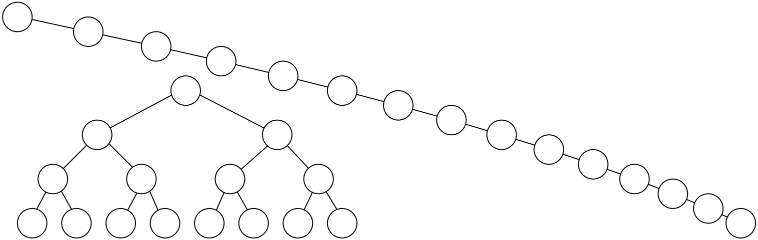
Also

$$\Pr[X \geq 10] \leq \frac{7}{10}.$$

Das ist nicht die bestmögliche Schranke; die Markov-Ungleichung ist meistens nicht "scharf".

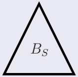
Zur Erinnerung...

Binäre Suchbäume können gut (kleine Höhe) oder schlecht (grosse Höhe) sein.



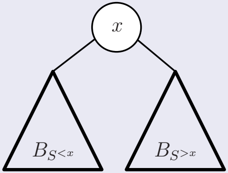
Konstruktion eines zufälligen Suchbaums B_S mit Schlüsselmenge S

Definition



$=$

- leer, falls $S = \emptyset$, und

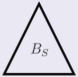


$x \in S$ zufällig, sonst.

- $S^{<x} := \{s \in S : s < x\}$
- $S^{>x} := \{s \in S : s > x\}$

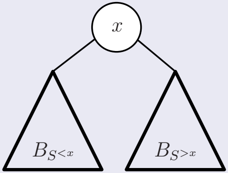
Konstruktion eines zufälligen Suchbaums B_S mit Schlüsselmenge S

Definition



=

- leer, falls $S = \emptyset$, und



- $x \in S$ zufällig, sonst.

- $S^{<x} := \{s \in S : s < x\}$
- $S^{>x} := \{s \in S : s > x\}$

Wahrscheinlichkeitsraum der B_S

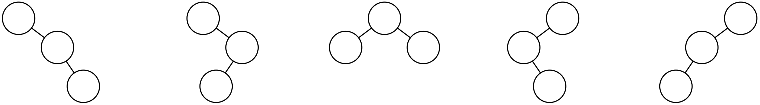
Für festes S bilden die möglichen Bäume B_S einen Wahrscheinlichkeitsraum Ω.

Wahrscheinlichkeitsraum der B_S

Für festes S bilden die möglichen Bäume B_S einen Wahrscheinlichkeitsraum Ω.

Beispiel: $S = \{1, 2, 3\}$.

- 5 mögliche Bäume mit ihren Wahrscheinlichkeiten



$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

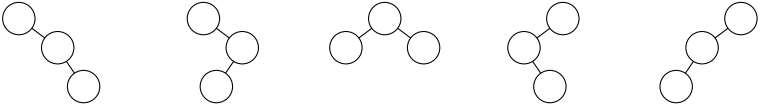
- 1/3: Schlüssel in der Wurzel ist 2.
- 1/6 (links): Schlüssel in der Wurzel ist 1, Schlüssel im rechten Kind ist 2.

Wahrscheinlichkeitsraum der B_S

Für festes S bilden die möglichen Bäume B_S einen Wahrscheinlichkeitsraum Ω.

Beispiel: $S = \{1, 2, 3\}$.

- 5 mögliche Bäume mit ihren Wahrscheinlichkeiten



$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

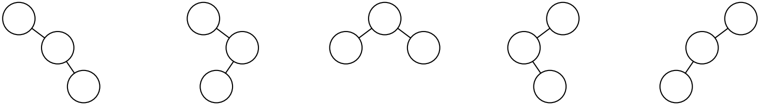
- 1/3: Schlüssel in der Wurzel ist 2.
- 1/6 (links): Schlüssel in der Wurzel ist 1, Schlüssel im rechten Kind ist 2.

Wahrscheinlichkeitsraum der B_S

Für festes S bilden die möglichen Bäume B_S einen Wahrscheinlichkeitsraum Ω.

Beispiel: $S = \{1, 2, 3\}$.

- 5 mögliche Bäume mit ihren Wahrscheinlichkeiten



$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

- 1/3: Schlüssel in der Wurzel ist 2.
- 1/6 (links): Schlüssel in der Wurzel ist 1, Schlüssel im rechten Kind ist 2.

Rang eines Elements

Definition

Für $S \subseteq \mathbf{R}$ ist der *Rang* von $x \in S$ definiert als

$$\mathrm{rg}(x) = \mathrm{rg}_S(x) := 1 + |\{y \in S : y < x\}| \ .$$

Das heisst, das kleinste Element von S hat Rang 1.

Für einen Baumknoten v ist $\mathrm{rg}(v)$ der Rang seines Schlüssels.

Rang eines Elements

Definition

Für $S \subseteq \mathbf{R}$ ist der *Rang* von $x \in S$ definiert als

$$\mathrm{rg}(x) = \mathrm{rg}_S(x) := 1 + |\{y \in S : y < x\}| \ .$$

Das heisst, das kleinste Element von S hat Rang 1.

Für einen Baumknoten v ist $\mathrm{rg}(v)$ der Rang seines Schlüssels.

Rang eines Elements

Definition

Für $S \subseteq \mathbf{R}$ ist der *Rang* von $x \in S$ definiert als

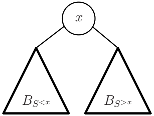
$$\mathrm{rg}(x) = \mathrm{rg}_S(x) := 1 + |\{y \in S : y < x\}| \ .$$

Das heisst, das kleinste Element von S hat Rang 1.

Für einen Baumknoten v ist $\mathrm{rg}(v)$ der Rang seines Schlüssels.

Tiefe eines Schlüssels in B_S

$=$ leer, falls $S = \emptyset$, und



$x \in S$ zufällig, sonst.

Definition

Die Zahl $\mathrm{d}_{B_S}(y)$ definiert durch

$$\mathrm{d}_{B_S}(y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } y = x, \\ 1 + \mathrm{d}_{B_{S<x}}(y), & \text{falls } y < x, \text{ und} \\ 1 + \mathrm{d}_{B_{S>x}}(y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

heisst *Tiefe* von y bzgl. B_S.

Zufallsvariable für die Tiefe des Schlüssels vom Rang i

Definition

Seien $i, n \in \mathbf{N}, i \leq n$. $D_n^{(i)}$ ist die Zufallsvariable für die Tiefe des Schlüssels vom Rang i in B_S.

$D_n := D_n^{(1)}$ ist die Zufallsvariable für die Tiefe des kleinsten Schlüssels in B_S.

Ziel: Berechne $\mathbf{E}[D_n]$, die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels!

Zufallsvariable für die Tiefe des Schlüssels vom Rang i

Definition

Seien $i, n \in \mathbf{N}, i \leq n$. $D_n^{(i)}$ ist die Zufallsvariable für die Tiefe des Schlüssels vom Rang i in B_S.

$D_n := D_n^{(1)}$ ist die Zufallsvariable für die Tiefe des kleinsten Schlüssels in B_S.

Ziel: Berechne $\mathbf{E}[D_n]$, die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels!

Zufallsvariable für die Tiefe des Schlüssels vom Rang i

Definition

Seien $i, n \in \mathbf{N}, i \leq n$. $D_n^{(i)}$ ist die Zufallsvariable für die Tiefe des Schlüssels vom Rang i in B_S.

$D_n := D_n^{(1)}$ ist die Zufallsvariable für die Tiefe des kleinsten Schlüssels in B_S.

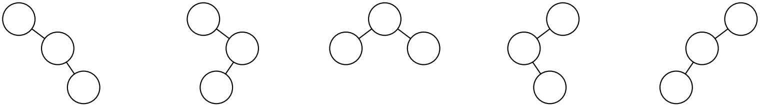
Ziel: Berechne $\mathbf{E}[D_n]$, die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels!

Kleine Fälle

- $\mathbf{E}[D_1] = 0$.
- $\mathbf{E}[D_2] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.
- $\mathbf{E}[D_3] = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{5}{6}$.

Kleine Fälle

- $\mathbf{E}[D_1] = 0$.
- $\mathbf{E}[D_2] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.
- $\mathbf{E}[D_3] = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{5}{6}$.



$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

Die Rekursionsgleichung

Ereignis B_i: Rang der Wurzel ist i.

Nach totalem Erwartungswert gilt:

$$\mathbf{E}[D_n] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbf{E}[D_n \mid B_i]}\cdot \underbrace{\Pr[B_i]}_{=1/n} .$$

$$\mathbf{E}[D_n \mid B_i] = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = 1, \text{ und} \\ 1 + \mathbf{E}[D_{i-1}], & \text{sonst.} \end{cases} ,$$

Beweis: die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels, gegeben, dass die Wurzel x von B_S Rang $i > 1$ hat, ist 1 plus die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels in $B_{S<x}$, einem zufälligen Suchbaum mit $i - 1$ Schlüsseln.

Die Rekursionsgleichung

Ereignis B_i: Rang der Wurzel ist i.

Nach totalem Erwartungswert gilt:

$$\mathbf{E}[D_n] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbf{E}[D_n \mid B_i]}\cdot \underbrace{\Pr[B_i]}_{=1/n} .$$

$$\mathbf{E}[D_n \mid B_i] = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = 1, \text{ und} \\ 1 + \mathbf{E}[D_{i-1}], & \text{sonst.} \end{cases},$$

Beweis: die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels, gegeben, dass die Wurzel x von B_S Rang $i > 1$ hat, ist 1 plus die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels in $B_{S<x}$, einem zufälligen Suchbaum mit $i-1$ Schlüsseln.

Die Rekursionsgleichung

Ereignis B_i: Rang der Wurzel ist i.

Nach totalem Erwartungswert gilt:

$$\mathbf{E}[D_n] \;=\; \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbf{E}[D_n \,|\, B_i]}\cdot \underbrace{\Pr[B_i]}_{=1/n} .$$

$$\mathbf{E}[D_n \,|\, B_i] = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = 1, \text{ und} \\ 1 + \mathbf{E}[D_{i-1}], & \text{sonst.} \end{cases} ,$$

Beweis: die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels, gegeben, dass die Wurzel x von B_S Rang $i > 1$ hat, ist 1 plus die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels in $B_{S<x}$, einem zufälligen Suchbaum mit $i - 1$ Schlüsseln.

Berechnung von $\mathbf{E}[D_n]$

Sei $d_n := \mathbf{E}[D_n]$. Wir haben die Rekursionsgleichung

$$d_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1, \text{ und} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(1 + d_{i-1}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

hergeleitet. Um diese zu lösen, benutzen wir nun einen typischen Trick.

Für $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} nd_n &= (n-1) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} + d_{n-1}, \quad \text{und} \\ (n-1)d_{n-1} &= (n-2) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[D_n]$

Sei $d_n := \mathbf{E}[D_n]$. Wir haben die Rekursionsgleichung

$$d_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1, \text{ und} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(1 + d_{i-1}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

hergeleitet. Um diese zu lösen, benutzen wir nun einen typischen Trick.

Für $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} nd_n &= (n-1) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} + d_{n-1}, \quad \text{und} \\ (n-1)d_{n-1} &= (n-2) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[D_n]$

Sei $d_n := \mathbf{E}[D_n]$. Wir haben die Rekursionsgleichung

$$d_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1, \text{ und} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(1 + d_{i-1}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

hergeleitet. Um diese zu lösen, benutzen wir nun einen typischen Trick.

Für $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} n d_n &= (n-1) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} + d_{n-1}, \quad \text{und} \\ (n-1)d_{n-1} &= (n-2) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[D_n]$

Für $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} nd_n &= (n-1) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} + d_{n-1}, \quad \text{und} \\ (n-1)d_{n-1} &= (n-2) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} \end{aligned}$$

Subtraktion:

$$\begin{aligned} & nd_n - (n-1)d_{n-1} = 1 + d_{n-1} \\ \Leftrightarrow \quad & nd_n = 1 + nd_{n-1} \\ \Leftrightarrow \quad & d_n = \frac{1}{n} + d_{n-1} \quad \text{für } n \geq 3. \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[D_n]$

Für $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} nd_n &= (n-1) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} + d_{n-1}, \quad \text{und} \\ (n-1)d_{n-1} &= (n-2) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2} \end{aligned}$$

Subtraktion:

$$\begin{aligned} & nd_n - (n-1)d_{n-1} = 1 + d_{n-1} \\ \Leftrightarrow \quad & nd_n = 1 + nd_{n-1} \\ \Leftrightarrow \quad & d_n = \frac{1}{n} + d_{n-1} \quad \text{für } n \geq 3. \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[D_n]$

Wir haben: $d_n = \frac{1}{n} + d_{n-1}$ für $n \geq 3$.

Zusammen mit $d_1 = 0$ und $d_2 = \frac{1}{2}$ bekommen wir

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{n} + d_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + d_{n-2} = \cdots \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{3} + \underbrace{d_2}_{1/2} = H_n - 1, \end{aligned}$$

wobei $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te *Harmonische Zahl* ist.

Berechnung von $\mathbf{E}[D_n]$

Wir haben: $d_n = \frac{1}{n} + d_{n-1} \quad$ für $n \geq 3$.

Zusammen mit $d_1 = 0$ und $d_2 = \frac{1}{2}$ bekommen wir

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{n} + d_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + d_{n-2} = \cdots \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{3} + \underbrace{d_2}_{1/2} = H_n - 1, \end{aligned}$$

wobei $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te *Harmonische Zahl* ist.

Berechnung von $\mathbf{E}[D_n]$

Theorem

Die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels in einem zufälligen Suchbaum über n Schlüsseln beträgt

$$H_n - 1 \leq \ln n.$$

Achtung: Das heisst aber noch lange nicht, dass *jeder* Schlüssel erwartetete logarithmische Tiefe hat, und erst recht nicht, dass die erwartete Höhe (das Maximum aller Tiefen) im Erwartungswert logarithmisch in n ist.

Berechnung von $\mathbf{E}[D_n]$

Theorem

Die erwartete Tiefe des kleinsten Schlüssels in einem zufälligen Suchbaum über n Schlüsseln beträgt

$$H_n - 1 \leq \ln n.$$

Achtung: Das heisst aber noch lange nicht, dass *jeder* Schlüssel erwartetete logarithmische Tiefe hat, und erst recht nicht, dass die erwartete Höhe (das Maximum aller Tiefen) im Erwartungswert logarithmisch in n ist.

Zufallsvariable für die Höhe

Seien $i, n \in \mathbf{N}, i \leq n$.

$$X_n := \max_{i=1}^{n} D_n^{(i)}$$

ist die Zufallsvariable für die Höhe von B_S.

- $\mathbf{E}[X_n]$ scheint aufgrund des Maximums schwierig zu sein.
- Es gilt **nicht**

$$\mathbf{E}[\max(X_1, X_2)] = \max(\mathbf{E}[X_1], \mathbf{E}[X_2]).$$

Im Gegenteil, das ist im allgemeinen völlig falsch.

Zufallsvariable für die Höhe

Seien $i, n \in \mathbf{N}, i \leq n$.

$$X_n := \max_{i=1}^{n} D_n^{(i)}$$

ist die Zufallsvariable für die Höhe von B_S.

- $\mathbf{E}[X_n]$ scheint aufgrund des Maximums schwierig zu sein.
- Es gilt **nicht**

$$\mathbf{E}[\max(X_1, X_2)] = \max(\mathbf{E}[X_1], \mathbf{E}[X_2]).$$

Im Gegenteil, das ist im allgemeinen völlig falsch.

Zufallsvariable für die Höhe

Seien $i, n \in \mathbf{N}, i \leq n$.

$$X_n := \max_{i=1}^{n} D_n^{(i)}$$

ist die Zufallsvariable für die Höhe von B_S.

- $\mathbf{E}[X_n]$ scheint aufgrund des Maximums schwierig zu sein.
- Es gilt **nicht**

$$\mathbf{E}[\max(X_1, X_2)] = \max(\mathbf{E}[X_1], \mathbf{E}[X_2]).$$

Im Gegenteil, das ist im allgemeinen völlig falsch.

Noch ein Trick...

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_n] &= \log 2^{\mathbf{E}[X_n]} \leq \log \mathbf{E}\left[2^{X_n}\right] \\ &= \log \mathbf{E}\left[2^{\max_{i=1}^n D_n^{(i)}}\right] \leq \log \mathbf{E}\left[\sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}\right].\end{aligned}$$

- Erstes $\leq$: *Jensens Ungleichung*
- Zweites $\leq$:

$$2^{\max_{i=1}^n D_n^{(i)}} = \max_{i=1}^{n} 2^{D_n^{(i)}} = \max_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}} \leq \sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}.$$

Noch ein Trick...

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_n] &= \log 2^{\mathbf{E}[X_n]} \leq \log \mathbf{E}\left[2^{X_n}\right] \\
&= \log \mathbf{E}\left[2^{\max_{i=1}^n D_n^{(i)}}\right] \leq \log \mathbf{E}\left[\sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}\right].
\end{aligned}$$

- Erstes $\leq$: *Jensens Ungleichung*
- Zweites $\leq$:

$$2^{\max_{i=1}^n D_n^{(i)}} = \max_{i=1}^n 2^{D_n^{(i)}} = \max_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}} \leq \sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}.$$

Noch ein Trick...

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_n] &= \log 2^{\mathbf{E}[X_n]} \leq \log \mathbf{E}\left[2^{X_n}\right] \\
&= \log \mathbf{E}\left[2^{\max_{i=1}^{n} D_n^{(i)}}\right] \leq \log \mathbf{E}\left[\sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}\right].
\end{aligned}$$

Definiere

$$Z_n := \sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}.$$

die Summe der "exponentiellen Tiefen" aller Blätter.

- $Z_0 = 0, Z_1 = 1$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^0 = 1$)
- $Z_2 = 2$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^1 = 2$)
- $\mathbf{E}[Z_3] = 4$.

Noch ein Trick...

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_n] &= \log 2^{\mathbf{E}[X_n]} \le \log \mathbf{E}\left[2^{X_n}\right] \\ &= \log \mathbf{E}\left[2^{\max_{i=1}^{n} D_n^{(i)}}\right] \le \log \mathbf{E}\left[\sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}\right].\end{aligned}$$

Definiere

$$Z_n := \sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}.$$

die Summe der "exponentiellen Tiefen" aller Blätter.

- $Z_0 = 0, Z_1 = 1$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^0 = 1$)
- $Z_2 = 2$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^1 = 2$)
- $\mathbf{E}[Z_3] = 4$.

Noch ein Trick...

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_n] &= \log 2^{\mathbf{E}[X_n]} \leq \log\, \mathbf{E}\left[2^{X_n}\right] \\ &= \log\, \mathbf{E}\left[2^{\max_{i=1}^{n} D_n^{(i)}}\right] \leq \log\, \mathbf{E}\left[\sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}\right].\end{aligned}$$

Definiere

$$Z_n := \sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}.$$

die Summe der "exponentiellen Tiefen" aller Blätter.

- $Z_0 = 0, Z_1 = 1$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^0 = 1$)
- $Z_2 = 2$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^1 = 2$)
- $\mathbf{E}[Z_3] = 4.$

Noch ein Trick...

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_n] &= \log 2^{\mathbf{E}[X_n]} \leq \log \mathbf{E}\left[2^{X_n}\right] \\ &= \log \mathbf{E}\left[2^{\max_{i=1}^n D_n^{(i)}}\right] \leq \log \mathbf{E}\left[\sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}\right].\end{aligned}$$

Definiere

$$Z_n := \sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}.$$

die Summe der "exponentiellen Tiefen" aller Blätter.

- $Z_0 = 0, Z_1 = 1$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^0 = 1$)
- $Z_2 = 2$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^1 = 2$)
- $\mathbf{E}[Z_3] = 4.$

Noch ein Trick...

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_n] &= \log 2^{\mathbf{E}[X_n]} \leq \log\ \mathbf{E}\left[2^{X_n}\right] \\ &= \log\ \mathbf{E}\left[2^{\max_{i=1}^{n} D_n^{(i)}}\right] \leq \log\ \mathbf{E}\left[\sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}\right].\end{aligned}$$

Definiere

$$Z_n := \sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}.$$

die Summe der "exponentiellen Tiefen" aller Blätter.

- $Z_0 = 0, Z_1 = 1$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^0 = 1$)
- $Z_2 = 2$ (ein Blatt, mit exponentieller Tiefe $2^1 = 2$)
- $\mathbf{E}[Z_3] = 4$.

Die Rekursionsgleichung

Lemma

Für $n \geq 2$,

$$\mathbf{E}[Z_n] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbf{E}[Z_n \,|\, \mathrm{rg}(\mathrm{Wurzel}) = i]}_{2(\,\mathbf{E}[Z_{i-1}] + \mathbf{E}[Z_{n-i}])} \cdot \underbrace{\Pr\left[\mathrm{rg}(\mathrm{Wurzel}) = i\right]}_{=1/n} \;.$$

Beweis: Gegeben, dass die Wurzel x Rang i hat, sind $B_{S<x}$ und $B_{S>x}$ zufällige Suchbäume mit jeweils $i-1$ und $n-i$ Schlüsseln, deren Blätter zusammen genau die Blätter von B_S enthalten. Die exponentielle Tiefe jedes Blattes ist in B_S doppelt so gross wie im entsprechenden Teilbaum.

Die Rekursionsgleichung

Lemma

Für $n \geq 2$,

$$\mathbf{E}[Z_n] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbf{E}[Z_n \,|\, \mathrm{rg}(\mathrm{Wurzel}) = i]}_{2(\,\mathbf{E}[Z_{i-1}] + \mathbf{E}[Z_{n-i}])} \cdot \underbrace{\mathrm{Pr}\left[\mathrm{rg}(\mathrm{Wurzel}) = i\right]}_{=1/n} .$$

Beweis: Gegeben, dass die Wurzel x Rang i hat, sind $B_{S_{<x}}$ und $B_{S_{>x}}$ zufällige Suchbäume mit jeweils $i-1$ und $n-i$ Schlüsseln, deren Blätter zusammen genau die Blätter von B_S enthalten. Die exponentielle Tiefe jedes Blattes ist in B_S doppelt so gross wie im entsprechenden Teilbaum.

Berechnung von $\mathbf{E}[Z_n]$

Sei $z_n := \mathbf{E}[Z_n]$. Wir haben die Rekursionsgleichung

$$z_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0, \\ 1, & \text{falls } n = 1, \text{ und} \\ \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{i-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

hergeleitet. Um diese zu lösen, benutzen wir nun einen typischen Trick. Für $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} nz_n &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2} + z_{n-1}), \quad \text{und} \\ (n-1)z_{n-1} &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2}) \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[Z_n]$

Sei $z_n := \mathbf{E}[Z_n]$. Wir haben die Rekursionsgleichung

$$z_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0, \\ 1, & \text{falls } n = 1, \text{ und} \\ \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{i-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

hergeleitet. Um diese zu lösen, benutzen wir nun einen typischen Trick. Für $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} nz_n &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2} + z_{n-1}), \quad \text{und} \\ (n-1)z_{n-1} &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2}) \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[Z_n]$

Sei $z_n := \mathbf{E}[Z_n]$. Wir haben die Rekursionsgleichung

$$z_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0, \\ 1, & \text{falls } n = 1, \text{ und} \\ \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} z_{i-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

hergeleitet. Um diese zu lösen, benutzen wir nun einen typischen Trick. Für $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} nz_n &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2} + z_{n-1}), \quad \text{und} \\ (n-1)z_{n-1} &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2}) \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[Z_n]$

Für $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} nz_n &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2} + z_{n-1}), \quad \text{und} \\ (n-1)z_{n-1} &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2}) \end{aligned}$$

Subtraktion:

$$\begin{aligned} & nz_n - (n-1)z_{n-1} = 4z_{n-1} \\ \Leftrightarrow \quad & nz_n = (n+3)z_{n-1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{z_n}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{z_{n-1}}{(n+2)(n+1)n} = \cdots = \frac{z_2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{30} . \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[Z_n]$

Für $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} nz_n &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2} + z_{n-1}), \quad \text{und} \\ (n-1)z_{n-1} &= 4(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-2}) \end{aligned}$$

Subtraktion:

$$\begin{aligned} & nz_n - (n-1)z_{n-1} = 4z_{n-1} \\ \Leftrightarrow \quad & nz_n = (n+3)z_{n-1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{z_n}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{z_{n-1}}{(n+2)(n+1)n} = \cdots = \frac{z_2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{30} . \end{aligned}$$

Berechnung von $\mathbf{E}[Z_n]$

Theorem

Die erwartete Summe der exponentiellen Tiefen aller Blätter in einem Suchbaum über n Schlüsseln beträgt

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{30}.$$

$$\mathbf{E}[X_n] \leq \log \mathbf{E}\left[\sum_{i=1,\ i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}\right] = \log \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{30} < 3 \log n.$$

Berechnung von $\mathbf{E}[Z_n]$

Theorem

Die erwartete Summe der exponentiellen Tiefen aller Blätter in einem Suchbaum über n Schlüsseln beträgt

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{30}.$$

$$\mathbf{E}[X_n] \leq \log \mathbf{E}\left[\sum_{i=1,\, i \text{ ist Blatt}}^{n} 2^{D_n^{(i)}}\right] = \log \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{30} < 3 \log n.$$

Berechnung von $\mathbf{E}[X_n]$

Theorem

Die erwartete Höhe eines zufälligen Suchbaums über n Schlüsseln beträgt höchstens

$$3 \log_2 n.$$

"Tail Estimates"

Markov-Ungleichung:

$$\Pr\left[Z_n > n \cdot \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{30}\right] < \frac{1}{n}.$$

Das heisst:

$$\Pr\left[X_n > 4\log_2 n\right] < \frac{1}{n},$$

somit gilt, dass die Höhe nicht nur im Erwartungswert, sondern mit hoher Wahrscheinlichkeit proportional zu $\log_2 n$ ist!

"Tail Estimates"

Markov-Ungleichung:

$$\Pr\left[Z_n > n \cdot \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{30}\right] < \frac{1}{n}.$$

Das heisst:

$$\Pr\left[X_n > 4\log_2 n\right] < \frac{1}{n},$$

somit gilt, dass die Höhe nicht nur im Erwartungswert, sondern mit hoher Wahrscheinlichkeit proportional zu $\log_2 n$ ist!

Was bedeutet das für Treaps?

- Treap: Suchbaum über n Schlüsseln,
  - in dem jedes Element eine zufällige Priorität hat, und
  - der bzgl. dieser Prioritäten ein Heap ist.
- $\Rightarrow$ Jeder Schlüssel hat mit gleicher Wahrscheinlichkeit die höchste Priorität und ist damit die Wurzel.
- Ein Treap mit zufälligen Prioritäten "ist" ein zufälliger Suchbaum!
- Die erwartete Höhe eines Treaps mit zufälligen Prioritäten ist höchsten $3 \log_2 n$.

Was bedeutet das für Treaps?

- Treap: Suchbaum über n Schlüsseln,
  - in dem jedes Element eine zufällige Priorität hat, und
  - der bzgl. dieser Prioritäten ein Heap ist.
- $\Rightarrow$ Jeder Schlüssel hat mit gleicher Wahrscheinlichkeit die höchste Priorität und ist damit die Wurzel.
- Ein Treap mit zufälligen Prioritäten "ist" ein zufälliger Suchbaum!
- Die erwartete Höhe eines Treaps mit zufälligen Prioritäten ist höchsten $3 \log_2 n$.

Was bedeutet das für Treaps?

- Treap: Suchbaum über n Schlüsseln,
  - in dem jedes Element eine zufällige Priorität hat, und
  - der bzgl. dieser Prioritäten ein Heap ist.
- $\Rightarrow$ Jeder Schlüssel hat mit gleicher Wahrscheinlichkeit die höchste Priorität und ist damit die Wurzel.
- Ein Treap mit zufälligen Prioritäten “ist” ein zufälliger Suchbaum!
- Die erwartete Höhe eines Treaps mit zufälligen Prioritäten ist höchsten $3 \log_2 n$.

Was bedeutet das für Treaps?

- Treap: Suchbaum über n Schlüsseln,
  - in dem jedes Element eine zufällige Priorität hat, und
  - der bzgl. dieser Prioritäten ein Heap ist.
- $\Rightarrow$ Jeder Schlüssel hat mit gleicher Wahrscheinlichkeit die höchste Priorität und ist damit die Wurzel.
- Ein Treap mit zufälligen Prioritäten "ist" ein zufälliger Suchbaum!
- Die erwartete Höhe eines Treaps mit zufälligen Prioritäten ist höchsten $3 \log_2 n$.

Was bedeutet das für Treaps?

Theorem

In einem Treap mit n Elementen ist die erwartete Zeit für das Suchen, das Einfügen oder das Löschen eines Elements mit hoher Wahrscheinlichkeit proportional zu $\log_2 n$.