D-INFK | Linear Algebra | HS 2023
Afonso Bandeira
Bernd Gärtner

Prüfung

Platz Nr.		Note
Leginummer		
Datum	25.12.2023	

Aufgabe	1	2	3	4	5		Total
Max. Punkte	20	20	18	18	24		100
Punkte							

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt mit der Leginummer aus. Die Platznummer finden Sie auf Ihrem Tisch. Legen Sie Ihre Legi gut sichtbar hin.
- **Öffnen Sie den Prüfungsbogen erst wenn Sie dazu aufgefordert werden!** Die Prüfungszeit beginnt für alle Teilnehmenden gleichzeitig. Die Prüfungsdauer beträgt **180 Minuten**.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus. Mit Ausnahme von Uhren (keine Smartwatches) sind keine elektronischen Geräte auf den Tischen erlaubt.
- Diese Prüfung umfasst **5 Aufgaben**. Alle Prüfungsseiten sind nummeriert und die Prüfung umfasst insgesamt **15 Seiten**. Die Prüfung ist doppelseitig bedruckt. Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen direkt in die Prüfung, nach jeder Aufgabe gibt es genügend freien Platz dafür. Einige Schmierblätter wruden Ihnen schon hingelegt. Falls Sie trotzdem zusätzliche Blätter brauchen, erhalten Sie diese von der Prüfungsaufsicht. Prüfen Sie Ihr Exemplar der Prüfung auf Vollständigkeit!
- Alle Unteraufgaben sind mit einem maximalen Punktewert (in eckiger Box) und einem Multiplikator (in Kreis) versehen. Nehmen wir an, der maximale Punktewert ist $p \in \mathbb{N}$ und der Multiplikator $m \in \mathbb{N}$ (wie hier im Beispiel am rechten Rand). Das bedeutet, dass wir die Unteraufgabe mit einer ganzen Zahl x zwischen 0 und p (inklusive) bewerten. Ihre tatsächliche Endpunktzahl die Sie für die Unteraufgabe erhalten ist aber $x \cdot m$. Inbesondere ist die Unteraufgabe also maximal $p \cdot m$ Punkte wert. $\boxed{\ \ /\mathrm{p}}$ $\cdot m$
- In den letzten 10 Minuten ist das frühzeitige Abgeben nicht mehr möglich.
- Nach Ablauf der Prüfungszeit: Legen Sie Ihren Stift beiseite und bleiben Sie ruhig an Ihrem Platz sitzen, bis Sie dazu aufgefordert werden, den Raum zu verlassen.
- Schreiben Sie Ihre Leginummer auf alle Blätter. Sortieren Sie die Blätter vor der Abgabe.
- Verwenden Sie keinen Bleistift und schreiben Sie nicht in rot oder grün.
- Versuchen Sie den Lösungsweg klar darzustellen, und schreiben Sie deutlich. Nur begründete Resultate werden bewertet, falls nicht anders vermerkt.
- Das vollständige Abgeben aller Lösungsblätter liegt in Ihrer Verantwortung.
- Nicht zu wertende Lösungsversuche durchstreichen, höchstens eine Lösung wird gewertet.
- Hilfsmittel: 6 einseitig oder 3 doppelseitig beschriebene A4 Seiten; kein Taschenrechner. Mit LaTeX oder Ähnlichem erfasste und gedruckte Notizen sind erlaubt. Die Notizen sollten ohne Lupe oder andere Hilfsmittel gut lesbar sein. Ein Wörterbuch (Englisch↔Deutsch oder andere Fremdsprache) als Papierbuch ist erlaubt (kein E-Book o.ä.).
- Unehrliches Handeln hat rechtliche Folgen gemäss der Disziplinarordnung der ETH.

1 Calculations I

/20

In this exercise you do **not** need to justify your answers! For each subtask, please submit only your final answer without any intermediate calculations. Simplify the numbers in your results as much as possible (e.g. write 3 instead of $2+1$ and $\frac{2}{3}$ instead of $\frac{4}{6}$).

a) Consider the 3×3 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

This matrix has a factorization $PA = LU$ with lower triangular $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, upper triangular $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, and a permutation matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Write down the matrices P, L, and U. All entries on the diagonal of L should be 1.

/1 ·7

b) Consider the 2×4 matrix $M = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Write down a basis of the nullspace $\mathbf{N}(M)$.

/1 ·6

c) Consider the 3×2 matrix $N = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Write down an orthonormal basis of the column space $\mathbf{C}(N)$.

/1 ·7

2 Calculations II

/20

In this exercise you do **not** need to justify your answers! For each subtask, please submit only your final answer without any intermediate calculations. Simplify the numbers in your results as much as possible (e.g. write 3 instead of $2+1$ and $\frac{2}{3}$ instead of $\frac{4}{6}$).

a) For $k \in \{1, 2, 3\}$, consider $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ defined as

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

and

$$y_1 = -\frac{5}{2}, \quad y_2 = -2, \quad y_3 = -\frac{1}{2}.$$

Write down $a, b \in \mathbb{R}$ such that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ for all $x \in \mathbb{R}$ minimizes

$$\sum_{k=1}^{3} (f(x_k) - y_k)^2.$$

Note that the optimal solution has squared error $\sum_{k=1}^{3} (f(x_k) - y_k)^2 = \frac{1}{6}$. You can use this to check your result.

/1 ·8

b) The matrix

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

has three real-valued eigenvalue-eigenvector pairs. Write down three such eigenvalue-eigenvector pairs

$$(\lambda_1, \mathbf{v}_1), (\lambda_2, \mathbf{v}_2), (\lambda_3, \mathbf{v}_3)$$

such that $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ are linearly independent. In particular, it should hold that $M\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$, $M\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$, and $M\mathbf{v}_3 = \lambda_3 \mathbf{v}_3$.

/6 ·2

3 Proofs I

/18

In this exercise you need to **justify** your answers! You are allowed to use results that appear in the typed or handwritten lecture notes by clearly stating what you are using. For example, you could say: "From the lecture we know that the nullspace of a matrix is orthogonal to its row space. Using this, we get...". All statements that do **not** appear in the typed or handwritten notes need a proof.

a) Let $n \in \mathbb{N}^+$ be arbitrary and consider the set of vectors

$$S = \{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Prove that S is a subspace of $\mathbb{R}^n$. /3 ·1

b) Let $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ be a basis of $\mathbb{R}^3$. Consider the three vectors $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in \mathbb{R}^3$ defined as

$$\mathbf{w}_1 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_2 := -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_3 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

Prove that $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ form a basis of $\mathbb{R}^3$. /3 ·2

c) Let $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ and $B \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ be arbitrary. Assume that the column space $\mathbf{C}(B)$ of B is contained in the nullspace $\mathbf{N}(A)$ of A, i.e. $\mathbf{C}(B) \subseteq \mathbf{N}(A)$. Prove that $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 4$.

/3 ·3

4 Proofs II

/18

In this exercise you need to **justify** your answers! You are allowed to use results that appear in the typed or handwritten lecture notes by clearly stating what you are using. For example, you could say: “From the lecture we know that the nullspace of a matrix is orthogonal to its row space. Using this, we get...”. All statements that do **not** appear in the typed or handwritten notes need a proof. In particular, statements that appeared on the assignments but not in the typed or handwritten lecture notes need to be reproven if you want to use them.

a) Let $n \in \mathbb{N}^+$ and let $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ such that $S^\top = -S$. Prove that $-S^2$ is symmetric and positive semidefinite.

/3 ·1

b) Let $n \in \mathbb{N}^+$ with $n \geq 2$ be arbitrary. Consider the function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n} (x_k)^k$$

for all $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$. Is f a linear transformation?

/3 ·2

c) Note that this exercise is intended to be more **challenging** than the others! Let $m, n \in \mathbb{N}^+$, and let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ be arbitrary. Assume that $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$ and $A^\top \mathbf{w} = \mathbf{v}$. Prove that 1 is a singular value of A.

/3 ·3

Solution sheet for multiple choice questions

/24

Note: only the solutions you marked here will count.

Question No.	Answer			
	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**
1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d

Circle the correct answer to each question in the table above. Only the answers in the table are considered, all other markings (for example in the text of the multiple choice questions themselves) will be ignored and not considered. Exactly one of the four answers to each question is correct. Each question earns 4 points if and only if it is solved correctly (meaning that the correct answer is circled). Wrong answers earn 0 points.

5 Multiple choice questions

Note that the difficulty of the multiple choice questions varies despite all of them being worth the same amount of points. Concretely, each of the following 6 multiple choice questions is worth 4 points. Remember to give your answers on the **solution sheet** for multiple choice questions! We will only look at the solution sheet. In particular, anything you write directly into the multiple choice questions here will not be considered.

1. Assume that the vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ are linearly independent. Which of the following sets of vectors is linearly **dependent**? ***Note: only one answer is correct.***

(a) $\mathbf{v}_1,\ -2\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$

(b) $\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_4$

(c) $\mathbf{v}_1,\ 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4,\ \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$

(d) $2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_4,\ 7\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$

2. Let $a, b \in \mathbb{R}$ and consider the matrix $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b \end{bmatrix}$. Assume that M is orthogonal. Which of the following statements must be **true**? ***Note: only one answer is correct.***

(a) $ab = -\frac{1}{2}$.

(b) $M^2 = I$.

(c) $a = \frac{b}{2}$.

(d) $b = \sqrt{1 - a^2}$.

3. For two matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ with $n \in \mathbb{N}^+$, which of the following statements must be **true**? ***Note: only one answer is correct.***

(a) If A and B have the same set of eigenvalues, then $A - B$ has an eigenvalue 0.

(b) AB and BA always have the same set of real eigenvalues.

(c) If $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ is an eigenvector of A corresponding to eigenvalue $\lambda \in \mathbb{C}$, then $\mathbf{v}$ is also an eigenvector of $A^\top$ corresponding to eigenvalue λ.

(d) If $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ is an eigenvector of A that corresponds to eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R}$, and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ is also an eigenvector of B that corresponds to eigenvalue 2λ, then $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ is also an eigenvector of $A + 2B$ corresponding to eigenvalue 4λ.

4. Let $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ with $\operatorname{rank}(A) = 1$ and $\operatorname{Tr}(A) = 5$. Which of the following is an eigenvalue of A? ***Note: only one answer is correct.***

(a) 1.

(b) -1.

(c) 5.

(d) -5.

5. Let $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$ be arbitrary. Let $A^\dagger$ be the pseudoinverse of A. Which of the following statements must be **true**? ***Note: only one answer is correct.***

(a) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\dagger)$.

(b) $AA^\dagger = I$.

(c) $\operatorname{rank}(A^\dagger) = 5$.

(d) $A^\dagger A = I$.

6. Let $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Which of the following choices of matrices U, Σ, V yields a valid singular value decomposition $A = U\Sigma V^\top$? ***Note: only one answer is correct.***

(a) $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

(b) $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

(c) $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$.

(d) $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.