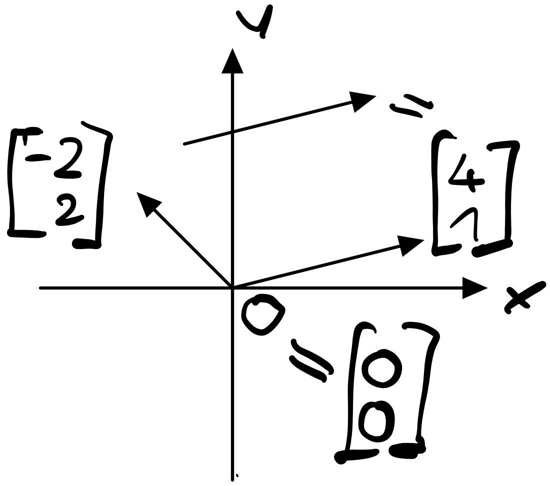
Kapitel 1

1.1. Vektoren und Linearkombinationen

Ein Vektor ist (momentan) ein Element von $\mathbb{R}^n$



$\mathbb{R}^2$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen

$n \in \mathbb{N}$: natürliche Zahl

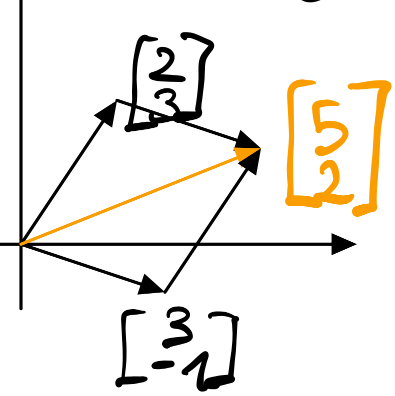
0 : Nullvektor

1.1.1 Vektor-Addition : $v + w$

„kombiniere die Bewegungen!"

$$\mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

„Parallelogramm"

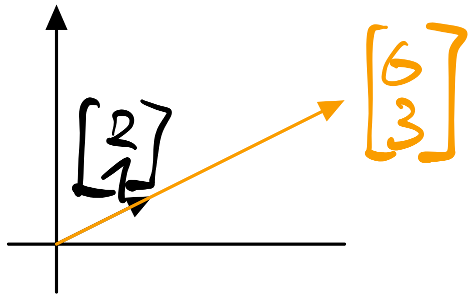


$$\mathbb{R}^n: \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{v} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}$$

1.1.2. Skalarmultiplikation : $c \cdot v$

„Gehe c-mal so weit!"

$\mathbb{R}^2$: $3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

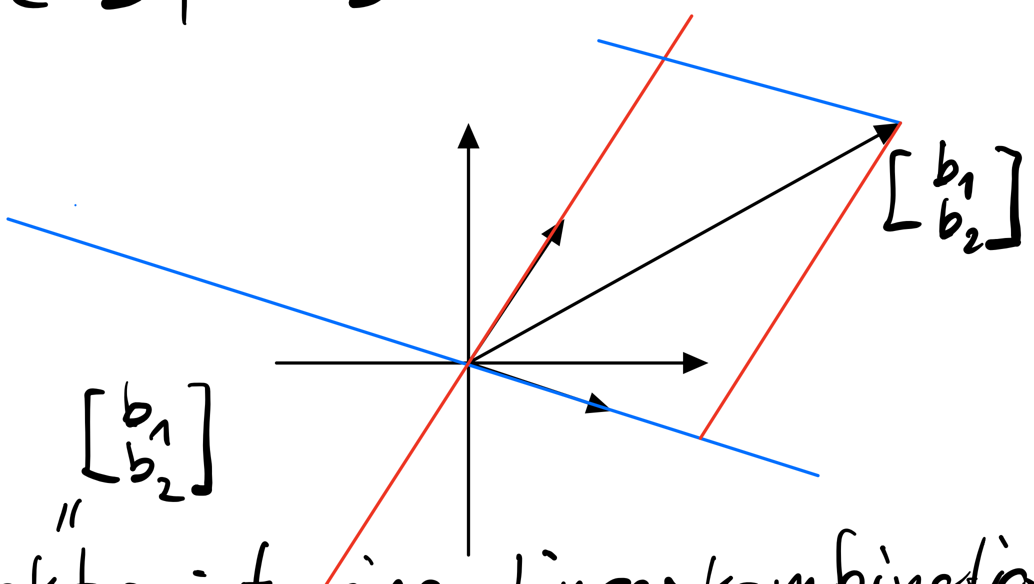


$\mathbb{R}^n$: $c \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{bmatrix}$

1.1.3. Linearkombination: $cv + dw$

$$5 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v} - 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}}_{w} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Hier: $c = 5$, $d = -3$



„Jeder Vektor ist eine Linearkombination von $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$!

Beweis: wir wollen c und d, so dass

$$c \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

„Kolonnen-Bild":

Zeichne ein Parallelogramm mit gegenüberliegenden Ecken 0 und $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ und Seiten parallel zu $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

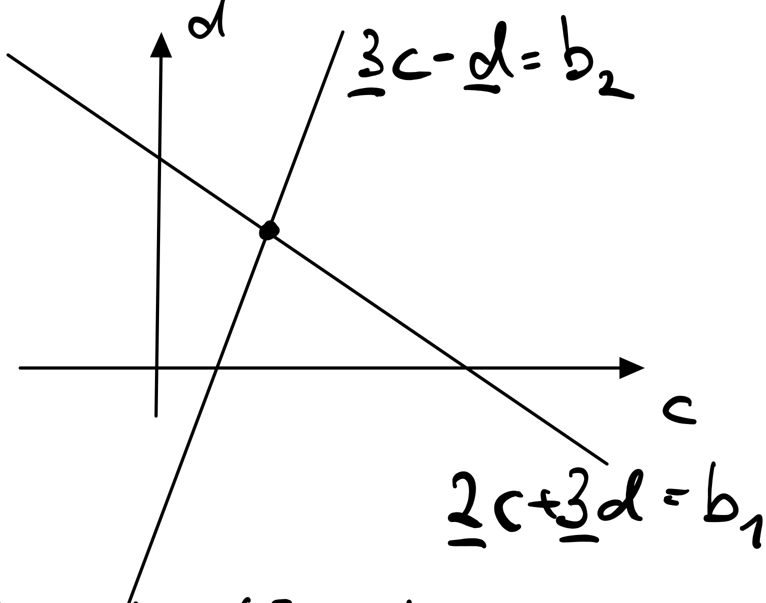
Die anderen beiden Ecken sind $c \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $d \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

„Zeilen-Bild":

Zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten:

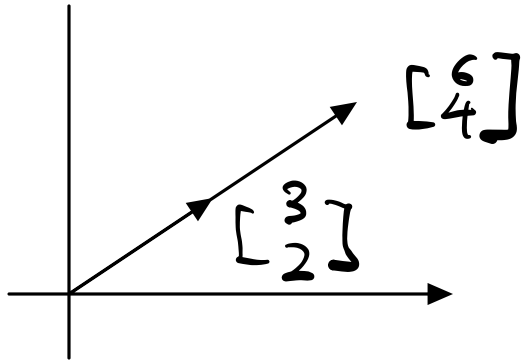
$$\begin{aligned} 2c + 3d &= b_1 \\ 3c - d &= b_2 \end{aligned}$$

Zeichne sie als Geraden in der cd-Ebene



Der Schnittpunkt löst beide Gleichungen.

Übungsaufgabe: was kann hier schief gehen (für andere Vektoren als $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$)



1.1.4. Kombination mehrerer Vektoren, Matrix-Notation

$$3\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&3&1\end{bmatrix}}_{\text{Matrix}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}3\\2\\-4\end{bmatrix}}_{\text{Vektor}}}_{\text{Matrix-Vektor-Multiplikation}}=\begin{bmatrix}1\cdot3-1\cdot2-4\cdot0\\2\cdot3+3\cdot2-1\cdot4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}$$

Matrix: „Container für Vektoren"

$\mathbb{R}^n$: $c_1v_1+c_2v_2+\dots c_nv_n=b$

Vektoren in $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^m$

m×1-Matrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix}|&|&&|\\v_1&v_2&\dots&v_n\\|&|&&|\end{bmatrix}}_{\text{m×n-Matrix (m Zeilen, n kolonnen)}}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|\\b\\|\end{bmatrix}$$