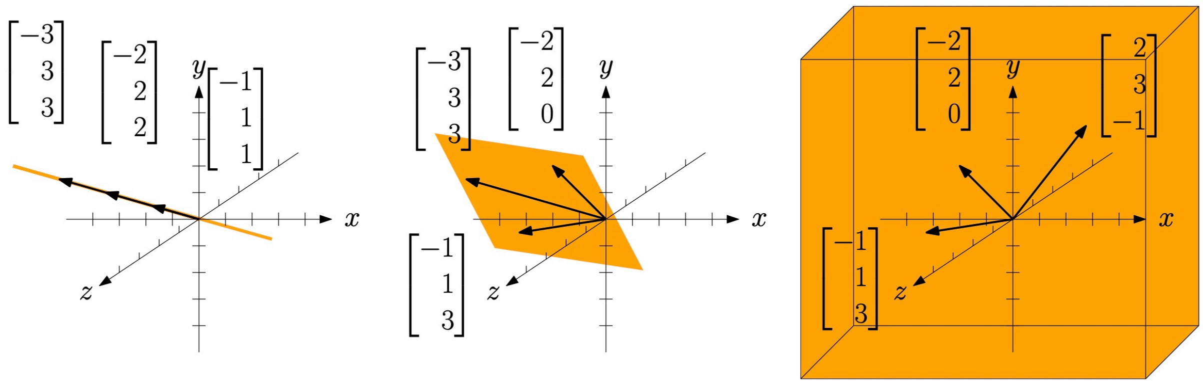
1.1.5 Drei Vektoren v_1, v_2, v_3 in $\mathbb{R}^3$

Die kombinationen bilden...

... eine Gerade (kollinear) ... eine Ebene (koplanar) ... den ganzen Raum (unabhängig)



1.2 Längen und Winkel mittels Skalarprodukten

1.2.1 Skalarprodukt (inneres Produkt) : $v \cdot w$

$$\mathbb{R}^2: \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 4 + 12 = 16$$

$$\mathbb{R}^n: \underset{v}{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}} \cdot \underset{w}{\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{bmatrix}} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n w_n$$

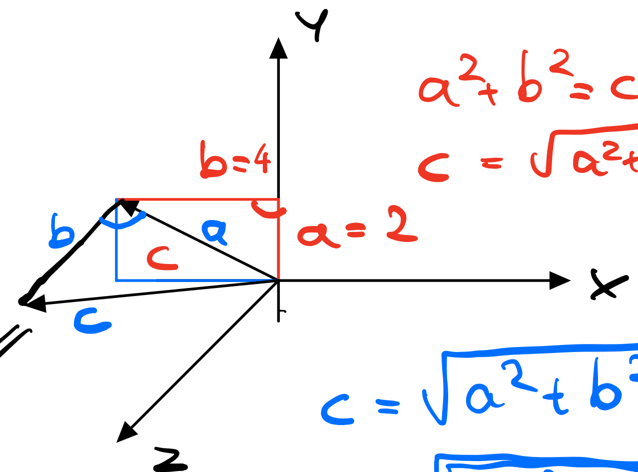
1.2.2. Länge eines Vektors v : $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

$\mathbb{R}^2$: $\left\| \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$\mathbb{R}^n$: $\left\| \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

Warum? Pythagoras!

$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$



$a^2 + b^2 = c^2$

$c = \sqrt{a^2+b^2}$

$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

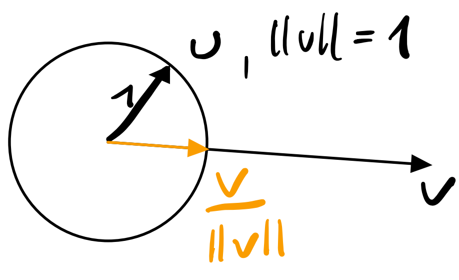
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{\underbrace{\sqrt{(-4)^2 + 2^2}}_{a=c}{}^2 + 3^2}$

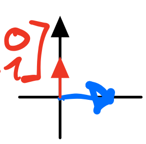
$= \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2}$

Einheitsvektor: $\|u\| = 1$

Für jeden Vektor $v \neq 0$ ist $\frac{v}{\|v\|}$ ein Einheitsvektor



Standard-Einheitsvektoren

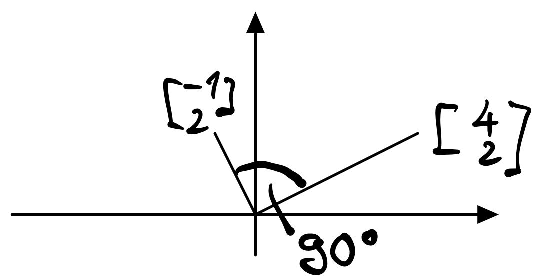
$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$

$\mathbb{R}^n$: $\quad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ Stelle i $(i = 1, 2, \ldots n)$

1.2.3 Senkrechte oder orthogonale Vektoren:

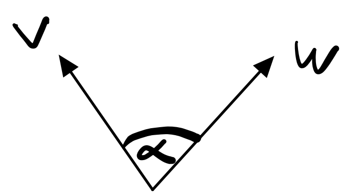
$v \cdot w = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{orthogonal oder senkrecht}} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$$



Kosinusformel:

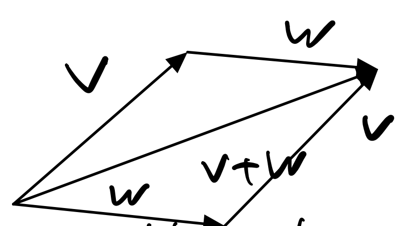
$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$$



Weil $|\cos(\alpha)| \leq 1$:

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\underbrace{|v \cdot w|}_{= |\cos(\alpha)| \cdot \|v\| \cdot \|w\|} \leq \|v\| \cdot \|w\|$$



Dreiecksungleichung:

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

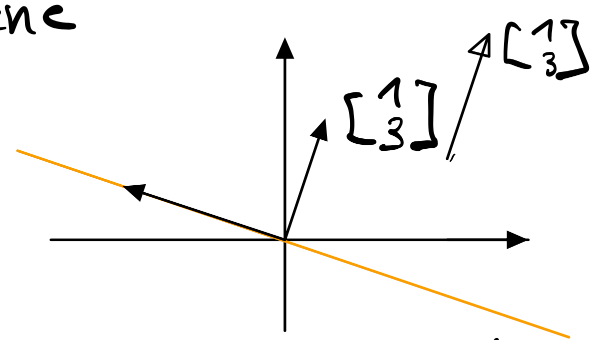
"Direkt nach v+w ist kürzer als via v (oder w)"

Hyperebenen:

Falls $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, so ist die Menge

$$\{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot d = 0\}$$

eine Hyperebene



1.3 Matrizen und ihre kolonnenräume

Matrix mit m Zeilen und n kolonnen:

$m \times n$-Matrix

3x2-Matrix : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

$m \times n$-Matrix : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & a_{ij} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

i-te Zeile

j-te kolonne

Matrix-Addition und Skalarmultiplikation, wie bei Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

0: Nullmatrix ($a_{ij} = 0$ für alle i, j)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 3x3 Nullmatrix

Quadratische Matrix: $m = n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Einheitsmatrix (Symbol I)

$a_{ii} = 1$ für alle i

$a_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$a_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix

$a_{ij} = 0$ wenn $i > j$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix

$a_{ij} = 0$ wenn $i < j$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 7 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

symmetrische Matrix

$a_{ij} = a_{ji}$ für alle i,j

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

4×4

Diagonalmatrix

1.3.1 Matrix-Vektor-Multiplikation

$$7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 8 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\text{Matrix-Vektor-Produkt}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 \end{bmatrix}}_{\text{Skalarprodukte}}$$