$$\underbrace{A}_{m\times n} \cdot \underbrace{x}_{\in\mathbb{R}^n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\overset{\in\mathbb{R}}{x_1} v_1 + \overset{\in\mathbb{R}}{x_2} v_2 + \dots + \overset{\in\mathbb{R}}{x_n} v_n = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{A\text{, Kolonnenbild}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Kombination der Vektoren $v_1 \dots v_n$

Zahl = Vektor · Vektor

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \cdot x \\ u_2 \cdot x \\ \vdots \\ u_m \cdot x \end{bmatrix}}_{m \text{ Skalarprodukte}} = \begin{bmatrix} — u_1 — \\ — u_2 — \\ \vdots \\ — u_m — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Clicker: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$A \cdot v = \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$ | $v \cdot Av = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$

1.3.2 Kolonnenraum : $C(A)$ $= 0$

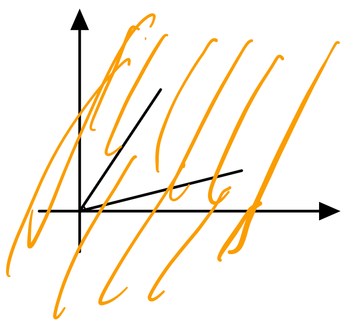
Alle Kombinationen („Spann") der Kolonnen

Wenn A eine $m \times n$-Matrix ist, dann ist

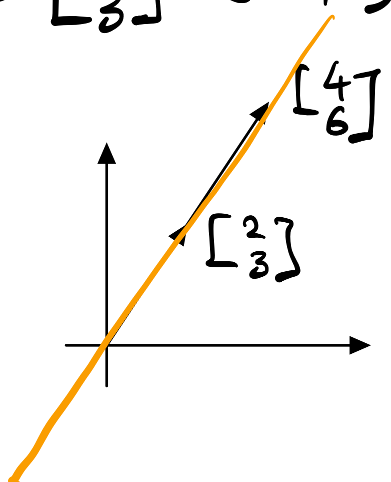
$$C(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Immer gilt: $0 \in C(A)$.

$$C\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$



$$C\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \left\{c \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R}\right\}$$



Wie viele Kolonnen sind nötig, um $C(A)$ aufzuspannen?

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Prüfe $v_1, v_2 \cdots v_n$!
Falls v_i eine Kombination der vorherigen Vektoren ist, dann ist v_i abhängig (nicht nötig):

3.~~Jede~~ Kombination von $v_1 .. v_i$ ist bereits eine kombination von $v_1 ... v_{i-1}$. Beweis:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_i v_i$$

$$= c_1 v_1 + ... + c_{i-1} v_{i-1} + c_i \overbrace{\underbrace{(d_1 v_1 + .. + d_{i-1} v_{i-1})}_{v_i \text{ ist kombination der vorherigen Vektoren}}}^{= v_i}$$

$$= \underbrace{(c_1 + c_i d_1) v_1 + .. + (c_{i-1} + c_i d_{i-1}) v_{i-1}}_{\text{kombination von } v_1 ... v_{i-1}.}$$

Andernfalls (v_i ist <u>keine</u> kombination von $v_1 .. v_{i-1}$): v_i ist unabhängig (und nötig).

PrüfreihenFolge egal: wir finden immer die gleiche Anzahl unabhängiger kolonnen (Abschnitt 3.4)

Was ist mit v_1? Ist v_1 eine kombination von $\underbrace{v_1, ..., v_0}_{\text{null Vektoren (keine)}}$

0 ist die einzige kombination von null Vektoren! („Die Summe von nichts ist 0.“) Das heisst: v_1 ist nötig, wenn $v_1 \neq 0$, und nicht nötig, wenn $v_1 = 0$.

1.3.3 (Lineare) Unabhängigkeit von Vektoren

Definition: Vektoren $w_1, w_2 ... w_k$ sind...

(linear) unabhängig, wenn... | (linear) abhängig, wenn...

(i) keiner der Vektoren eine Kombination der vorherigen ist. Oder

(ii) keiner der Vektoren eine Kombination der anderen ist. Oder

(iii) es gibt keine $c_1, c_2, \dots c_K$ ausser $0, 0, \dots, 0$, so dass $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_K w_K = 0$ (der Nullvektor kann nur auf triviale Weise als Kombination von $w_1, w_2, \dots w_K$ geschrieben werden.)

(i') einer der Vektoren eine Kombination der vorherigen ist. Oder

(ii') einer der Vektoren ist eine Kombination der anderen ist. Oder

(iii') es $c_1 \dots c_K$ ausser $0, 0, \dots 0$ gibt, so dass $c_1 w_1 + \dots + c_K w_K = 0$ (der Nullvektor ist eine nichttriviale Kombination von $w_1, w_2 \dots w_K$)

Alle Sätze sagen das Gleiche! (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

Die Gegenteile auch: (i') $\Leftrightarrow$ (ii') $\Leftrightarrow$ (iii')

Beweis (alle Gegenteile sagen das gleiche):

(i') $\Rightarrow$ (ii') („wenn (i') stimmt, dann auch (ii')"):

klar ✓ : eine Kombination der vorherigen ist insbesondere eine Kombination der anderen.

(ii') $\Rightarrow$ (iii')

Wenn $w_i = c_1 w_1 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_K w_K$

Dann: $\underbrace{c_1 w_1 + \dots + c_{i-1} w_{i-1} \underset{\neq 0}{\underline{-1}} w_i + c_{i+1} w_{i+1} + \dots + c_K w_K = 0}_{\text{(iii')}}$

$(iii') \Rightarrow (i')$