$(iii') \Rightarrow (i')$

Wenn es $c_1, c_2 \ldots c_k$ ausser $0, 0, \ldots 0$ gibt, so dass $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_k w_k = 0 \longleftarrow (iii')$

Wir nehmen das grösste $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ so dass $c_i \neq 0$.
Es gilt dann

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_i w_i = 0$$

Es gilt: $w_i = -\frac{c_1}{c_i} w_1 - \frac{c_2}{c_i} w_2 \ldots - \frac{c_{i-1}}{c_i} w_{i-1}$

(i')

Zusammenfassend: $(i') \Rightarrow (ii') \Rightarrow (iii')$

Das heisst: $(i') \Leftrightarrow (ii') \Leftrightarrow (iii')$

Die kolonnen einer Matrix sind...

...(linear) unabhängig wenn..

(iii) es keinen Vektor x ausser 0 gibt, so dass $Ax = 0$.

(iii') es gibt einen Vektor $x \neq 0$ so dass $Ax = 0$.

1.3.4. Rang

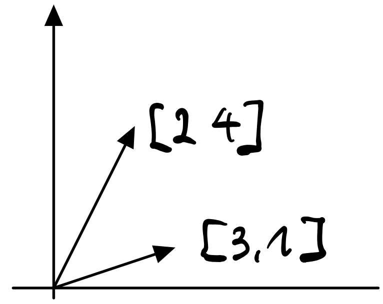
: $\text{rang}(A) =$ Anzahl unabh. kolonnen

$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2$; $\text{rang}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1$

$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$

Zeilenraum $R(A)$: Alle kombinationen der Zeilen

$$R\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$



$$R\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \{ c\,[2\ 4] : c \in \mathbb{R} \}$$

In allen Beispielen bisher : Anzahl unabh. Kolonnen = Anzahl unabh. Zeilen. Zufall? (3.5)

Einfacher Fall : Rang 1

Matrizen vom Rang 1 : Eine unabhangige kolonne

Alle kolonnen sind Vielfache eines Vektors $v \neq 0$

$$= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

m

$$\Longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} c_1 v_1 & c_2 v_1 & & c_n v_1 \\ c_1 v_2 & c_2 v_2 & \cdots & c_n v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 v_m & c_2 v_m & & c_n v_m \end{bmatrix}$$

$\in m \times n$

(irgendein $c_i v_j \neq 0$)

$\Updownarrow$

Alle Zeilen sind Vielfache eines Vektors $c \neq 0$

$[c_1\ c_2\ \cdots\ c_n]$

1.4 Matrix-Multiplikation : AB und CR

A : $m \times k$ - Matrix , B $k \times n$ - Matrix

AB : $m \times n$ - Matrix

$$AB = \underbrace{\begin{bmatrix} — u_1 — \\ — u_2 — \\ \vdots \\ — u_m — \end{bmatrix}}_{A,\ \text{Zeilenbild}} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 & \cdots & u_1 \cdot v_n \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 & & u_2 \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m \cdot v_1 & u_m \cdot v_2 & & u_m \cdot v_n \end{bmatrix}}_{mn \text{ Skalarprodukte}}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{"Kolonnentausch"})$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{"Zeilentausch"})$$

Bei quadratischen Matrizen gilt meistens $AB \neq BA$ (Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ).

Im allgemeinen: BA kann undefiniert sein (wenn $n \neq m$) oder von anderer Grösse als AB

Alles ist Matrixmultiplikation!

Matrix-Vektor: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= 2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}}_{2\times 1}$

Vektor-Matrix: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{= 2\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4, & 6 \end{bmatrix}}_{1\times 2}$

Skalarprodukt: (inneres Produkt)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}}_{1\times 2 = 2\times 1}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 3 + 2\cdot 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\end{bmatrix}$$

Äusseres Produkt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}}_{2\times 1 = 1\times 2} = \begin{bmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2\\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}3 & 6\\ 4 & 8\end{bmatrix}}_{2\times 2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} — u_1 B — \\ — u_2 B — \\ \vdots \\ — u_m B — \end{bmatrix}}_{AB,\ \text{Zeilenbild}} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} — u_1 — \\ — u_2 — \\ \vdots \\ — u_m — \end{bmatrix}}_{A,\ \text{Zeilenbild}} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{B,\ \text{Kolonnenbild}}}_{A\cdot B} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{AB,\ \text{Kolonnenbil}}$$

1.4.1 Distributivität, Assoziativität

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)D = BD + CD$$

(nachrechnen)

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

(Klamnern können weggelassen werden, weil sie keine Rolle spielen)

auch einfach nachzurechnen (langweilig)

Mehr Matrizen:

$$(AB)(CD) = A((BC)D) = \ldots = ABCD$$

muss bewiesen werden