1.4.2 $A = CR$

Nochmal: Bestimmung der unabh. Kolonnen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

	$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$
v_1	$= 1 \cdot v_1$	$= 2 \cdot v_1$		$3v_1$
v_2				
v_3			$= 1 \cdot v_3$	$-2v_3$
v_4				
unabhängig?	ja	nein	ja	nein

kurz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{R}$$

C: die unabhängigen Kolonnen

R: „wie sind die Kolonnen von C zu kombinieren, so dass wir alle Kolonnen von A erhalten?"

Allgemein:

$$\underbrace{A}_{m \times n} = \underbrace{C}_{m \times r} \underbrace{R}_{r \times n}$$

r: Rang von A

Rang-Faktorisierung von A

Effiziente Berechnung: (3.2)

Kapitel 2 Lineare Gleichungssysteme $Ax=b$

2.1 Elimination und Rückwärtseinsetzung

System von m linearen Gleichungen in n von Unbekannten:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Matrix-Schreibweise: $Ax=b$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A,\ m\times n}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x\in\mathbb{R}^n}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b\in\mathbb{R}^m}
$$

Gegeben A und b, finde x! (so dass $Ax=b$)

2.1.1 Rückwärtseinsetzung (Momentan: $m=n$)

Wenn A eine obere Dreiecksmatrix:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 19 \\ 17 \\ 14 \end{bmatrix}
$$

	Gleichung	Einsetzung	Lösung
Zeile 3	$7x_3=14$	—	$x_3=2$
Zeile 2	$5x_2+6\underbrace{x_3}_{=2}=17$	$5x_2+12=17$	$x_2=1$
Zeile 1	$2x_1+3\underbrace{x_2}_{=1}+4\underbrace{x_3}_{=2}=19$	$2x_1+11=19$	$x_1=4$

2.1.2 Elimination

Allgemeiner Fall: transformiere $Ax=b$ zu $Ux=c$ mit gleicher Lösung, aber U obere Dreiecksmatrix (Gauss-Elimination). Dann Rückwärtseinsetzung

Zeilenoperationen

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\4&11&14\\2&8&17\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}19\\55\\50\end{bmatrix}$$

„subtrahiere 2·(Zeile 1) von Zeile 2!"

$$E_{21}A=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&5&6\\2&8&17\end{bmatrix} \qquad E_{21}b=\begin{bmatrix}19\\17\\50\end{bmatrix}$$

$$E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

„subtrahiere 1·(Zeile 1) von Zeile 3!"

$$E_{31}E_{21}A=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&5&13\end{bmatrix} \qquad E_{31}E_{21}b=\begin{bmatrix}19\\17\\31\end{bmatrix}$$

$$E_{31}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

„subtrahiere 1·(Zeile 2) von Zeile 3"

$$E_{32}E_{31}E_{21}A=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&7\end{bmatrix} \qquad E_{32}E_{31}E_{21}b=\begin{bmatrix}19\\17\\14\end{bmatrix}$$

$$E_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

O = Pivotelemente (sollten ≠ 0 sein)

Weniger schöner Fall:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 14 \\ 2 & 8 & 17 \end{bmatrix} \qquad b = \ldots$$

Elimination in der ersten Kolonne

Pivotelement $= 0$

$$E_{31} E_{21} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

Mit Pivotelement 0 können wir nicht weiter machen.
Aber: Vertauschen der letzten beiden Zeilen!

$$P_{23} E_{31} E_{21} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad P_{23} E_{31} E_{21} b = \ldots$$

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Permutationsmatrix

Hier: fertig!

Hässlicher Fall:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 14 \\ 2 & 3 & 17 \end{bmatrix} \qquad b = \ldots$$

Elimination in der ersten Kolonne:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Pivotelement: Diagonalelement in der Zeile, deren Vielfache ich aktuell von den Zeilen darunter abziehen möchte.

Zeilenvertauschungen helfen nicht, wir geben auf .. nur für den Moment.

Bemerkung: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist auch ein hässlicher Fall.

(Rückwärtseinsetzung: $0x_3 = \ldots$)

Wenn wir durchkommen ($Ax = b \rightarrow Ux = c$):
Lösen von $Ux = c$ (Rückwärtseinsetzung) löst auch $Ax = b$. Warum?

<u>Gleiche Lösungen</u> vor und nach jeder Zeilenoperation!