Gleiche Lösungen vor und nach jeder Zeilenoperation!

„x“ ist vorher eine Lösung:

T: Matrix der Zeilenoperation

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
Ax=b \arrow[r, "\substack{\text{„subtrahiere } c\cdot(\text{Zeile } i)\\ \text{von Zeile } j\text{“ oder}\\ \text{„vertausche Zeilen } i \text{ und } j\text{“}}", "\text{„do“}"'] & \underbrace{TA}_{A'}x = \underbrace{Tb}_{b'} \arrow[d] \\
\underbrace{T'A'}_{A}x = \underbrace{T'b'}_{b} \arrow[u] & A'x = b' \arrow[l, "\text{„undo“}"', "\substack{\text{„addiere } c\cdot(\text{Zeile } i)\\ \text{zu Zeile } j\text{“ oder}\\ \text{„vertausche Zeilen } i\\ \text{und } j\text{“}}"]
\end{tikzcd}$$

$A'x = b'$: x ist nachher eine Lösung

Gilt auch, wenn A nicht quadratisch ist.

Spezialfall: $b = 0$ ($b' = Tb = 0$), d.h.

$$Ax = 0 \iff A'x = 0$$

Unabhängigkeit von Kolonnen wird unter Zeilenoperationen aufrechterhalten.

Die Kolonnen von A sind abhängig

$$\overset{(iii')}{\iff}$$

es gibt $x \neq 0$ so dass $Ax = 0$

$$\iff$$

es gibt $x \neq 0$ so dass $A'x = 0$

$$\overset{(iii')}{\iff}$$

Die Kolonnen von A' sind abhängig.

Hässlicher Fall in Schritt $j \Rightarrow$ Die ersten j Kolonnen von A sind abhängig.

Beispiel: $j=3$ Finde

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\neq 0} = 0$$

Matrix der ersten drei Kolonnen

Dann sind die drei Kolonnen abhängig (iii')

	Gleichung	Ersetzung	Lösung
Zeile 3	$0\, x_3 = 0$		$x_3 = 4$ (alles geht)
Zeile 2	$4x_2 + 5\underbrace{x_3}_{4} = 0$	$4x_2 + 20 = 0$	$x_2 = -5$
Zeile 1	$x_1 + 2\underbrace{x_2}_{-5} + 3\underbrace{x_3}_{4} = 0$	$x_1 + 2 = 0$	$x_1 = -2$

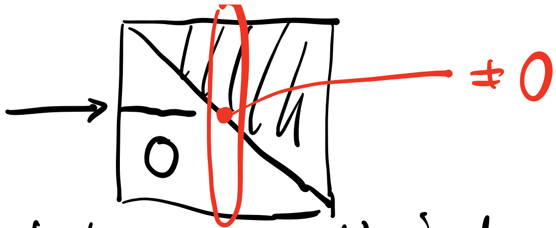
Die drei Kolonnen sind auch in der Originalmatrix A abhängig, weil diese Abhängigkeit unter Zeilenoperationen erhalten bleibt.

2.1.3 Elimination geht durch (ohne hässlichen Fall) $\Longleftrightarrow$ Die Kolonnen von A sind unabhängig.

Elimination geht durch

$\Rightarrow$ U hat alle Diagonalelemente $\neq 0$ (Pivotelemente)

$\Rightarrow$ Jede Kolonne von U unabhängig von den vorherigen:



$\Rightarrow$ Alle Kolonnen von U sind unabhängig (1.3.3)

$\Rightarrow$ " " " A " " (2.1.2)

Elimination scheitert

$\Rightarrow$ Die Kolonnen einer Zwischenmatrix sind abhängig (hässlicher Fall)

$\Rightarrow$ Die Kolonnen von A sind abhängig (2.1.2)

2.2 Eliminationsmatrizen und inverse Matrizen

Elimination

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 11 & 14 \\ 2 & 8 & 17 \end{bmatrix} \underset{\text{„undo"}\ E^{-1}}{\overset{\text{„do"}}{\rightleftarrows}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = U$$

$$U = \overbrace{\underset{\text{do}}{E_{32}}\ \underset{\text{do}}{E_{31}}\ \underset{\text{do}}{E_{21}}}^{E} A \qquad A = \overbrace{\underset{\text{undo}}{E_{21}^{-1}}\ \underset{\text{undo}}{E_{31}^{-1}}\ \underset{\text{undo}}{E_{32}^{-1}}}^{E^{-1}} U$$

Eine $n\times n$-Matrix M heisst invertierbar, wenn es eine $n\times n$-Matrix M^{-1} gibt (die Inverse von M), so dass

$$\underset{\text{„do!"}}{M}\ \underset{\text{„undo"}}{M^{-1}} = M^{-1}M = \underset{\text{„don't do anything"}}{I} = \underset{\text{„Die Eins der Matrizen"}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}$$

Es kann nur eine Inverse geben:

Wenn $MX = YM = I$ (X, Y sind kandidaten für M^{-1})

dann $X = Y$, weil

$$X = IX = (YM)X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Assoziativität}}}{=} Y(MX) = YI = Y$$

Fall 1×1: $M = [x]$, $M^{-1} = \left[\frac{1}{x}\right]$, $x \neq 0$

$(M \cdot M^{-1} = M^{-1}M = [1])$

Fall 2×2: $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\text{falls } \neq 0}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

$$\left(MM^{-1} = M^{-1}M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Nachrechnen!

2.2.1 Der Inversen-Satz

Fall $n\times n$:

A ist invertierbar (i)

$\Longleftrightarrow$

Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ hat $Ax = b$ eine eindeutige Lösung (ii)

$x = \frac{b}{A}$

$x = A^{-1}b$

$\Longleftrightarrow$

Die kolonnen von A sind unabhängig (iii)

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Wenn A invertierbar ist, dann

- $A^{-1}b$ löst $Ax=b$: $A(\underbrace{A^{-1}b}_{x}) = (AA^{-1})b = Ib = b$
- Eindeutigkeit: wenn $Ax=b$ gilt, dann muss $x=A^{-1}b$ sein:

$$A^{-1}b = A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = Ix = x$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wenn $Ax=b$ immer eindeutig lösbar ist, dann auch $Ax=0$. Dann ist aber $x=0$ die eindeutige Lösung. Das heisst, die Kolonnen von A sind unabhängig (1.3.3)

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Wenn die Kolonnen von A unabhängig sind, dann geht Elimination durch (2.1.3) und gibt uns $Ax=b \rightarrow Ux=c$. $Ux=c$ hat eine eindeutige Lösung (Rückwärtseinsetzung), also hat auch $Ax=b$ eine eindeutige Lösung.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wenn $Ax=b$ für alle b eindeutig lösbar ist, dann gibt es Vektoren $v_1, v_2 \dots v_n$ so dass

$$A v_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{=e_1}, \quad A v_2 = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{=e_2}, \dots, A v_n = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}}_{=e_n}$$

D.h. $$A \underbrace{\begin{bmatrix}| & | & & |\\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n\\ | & | & & |\end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix}1 & 0 & & 0\\ 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots\\ 0 & \vdots & & 0\\ 0 & 0 & & 1\end{bmatrix} = I$$

$$\quad = e_1 \quad = e_2 \quad \dots \quad = e_n$$

D.h. $AB = I$. Wir haben auch $BA = I$ (Übungen), d.h. B ist die Inverse von A.

Es stimmt immer: wenn wir zwei Matrizen A und B haben (quadratisch) mit $AB = I$, dann gilt automatisch $BA = I$.