2.2.2 Die Inverse eines Produkts

Wenn A, B $n\times n$-Matrizen sind und invertierbar, dann

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

(„undo" Funktioniert in umgekehrter Reihenfolge)

Beweis:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1}\\ &= A I A^{-1}\\ &= A A^{-1} = I\end{aligned}$$

Brauchen auch:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I \quad \checkmark$$

Geht auch für mehr Matrizen:

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

2.3 Matrixberechnungen und $A = LU$

2.3.1 Die kosten der Elimination

Wie viele Operationen $(\cdot, /, +, -)$ werden benötigt, um $Ax = b$ zu lösen? (A ist $n \times n$)

Elimination in Schritt j: Subtrahiere $l_{ij} \cdot$ (Zeile j) von Zeile i

$$\begin{array}{r c c c c}
 & \text{Matrix} & \text{Anzahl Einträge} & & \text{Rechte Seite}\\
 & \left[\begin{array}{ccccc} u_{11} & & & & \\ 0 & u_{22} & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & u_{jj} & \cdots & u_{jn} \\ \vdots & \vdots & *_{ij} & \cdots & *_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \end{array}\right] & & & \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_j \\ *_i \\ \end{array}\right]\\
\text{Zeile } j & & \leftarrow n-j+1 & 1 \rightarrow & \\
\text{Zeile } i & & \leftarrow n-j+1 & 1 \rightarrow &
\end{array}$$

L O 0

Operation	wo?	für ein i: A → U	b → c	für alle $i = j+1 \ldots n$: A → U	b → c
/	$l_{ij} = *_{ij} / u_{jj}$	1	/	$n-j$	/
$\cdot$	$r = l_{ij} \cdot (\text{Zeile } j)$	$n-j+1$	1	$(n-j)(n-j+1)$	$(n-j)$
−	Zeile i − r	$n-j+1$	1	$(n-j)(n-j+1)$	$(n-j)$

Benutze bekannte Formeln (Summe der ersten Zahlen, Summe der ersten Quadratzahlen):

A → U:

– Divisionen: $$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

[Kleiner Gauß:

$$\begin{array}{rl} & 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \\ + & 100 + 99 + 98 + \ldots + 1 \\ \hline & 101 + 101 + \ldots + 101 \end{array}$$

$$= 100 \cdot 101 \rightarrow \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$]

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) = 1 + 2 + \ldots + (n-1)$$
$$= \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

– Multiplikationen / Subtraktionen:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)(n-j+1) = \frac{1}{3}(n^3 - n)$$

b → c:

– Multiplikationen / Subtraktionen:

$$\sum_{j=1}^{n-1}(n-j) = \frac{1}{2}(n^2-n).$$

Ungefähr $\frac{2}{3}n^3$ Operationen für $A \to U$
und ungefähr n^2 für $b \to c$

<u>Rückwärtseinsetzung</u>

In Zeile j von $Ux=c$, ersetze die bereits bekannten Werte von $x_{j+1}, \dots x_n$ in

$$u_{jj}x_j + u_{jj+1}x_{j+1} + \dots + u_{jn}x_n = c_j$$

und löse nach x_j auf:

$$x_j = \frac{1}{u_{jj}}\left(c_j - u_{j,j+1}x_{j+1} - \dots - u_{jn}x_n\right)$$

Operation	für ein j	für alle $j = n, n-1, \dots 1$
$/$	1	n
$\cdot$	$n-j$	$\sum_{j=1}^{n}(n-j) = \frac{1}{2}(n^2-n)$
$-$	$n-j$	$\sum_{j=1}^{n}(n-j) = \frac{1}{2}(n^2-n)$

Lösen von $Ax=b$ (für ein oder mehrere b)
benötigt ungefähr $\frac{2}{3}n^3$ Operationen für $A \to U$
und ungefähr $2n^2$ Operationen pro b
($b \to c$, Rückwärtseinsetzung)