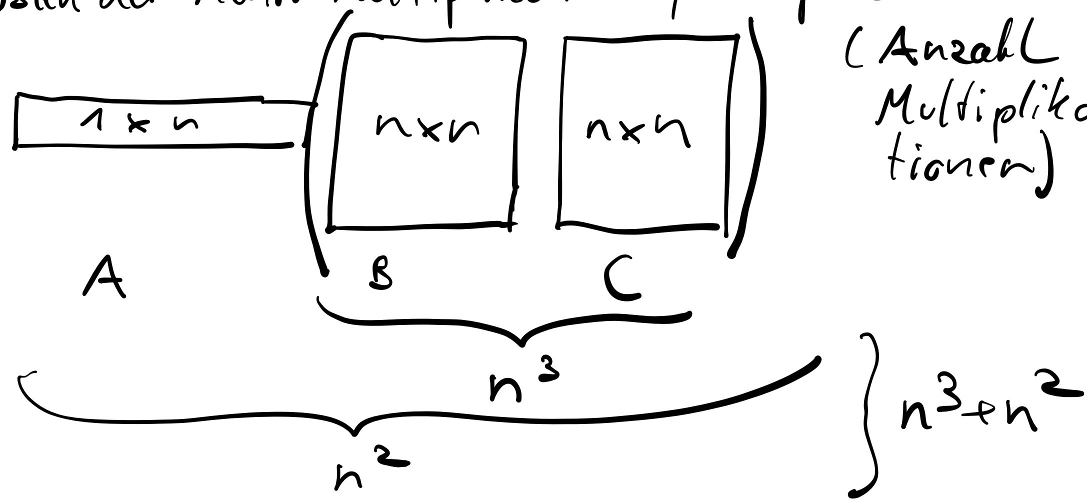
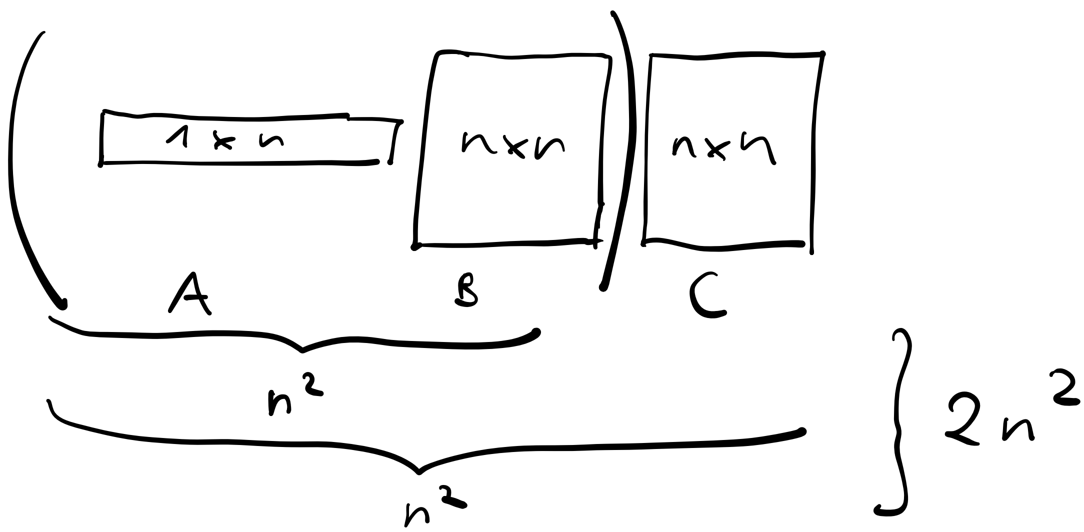
Kosten der Matrixmultiplikation, Beispiel

(Anzahl Multiplikationen)





Frage: Was ist die „effizienteste" Klammerung von $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ (n Matrizen)?

Antwort: kann einfach berechnet werden

2.3.2 Die tolle Faktorisierung $A = LU$

Elimination: $A \rightarrow U$

Elimination in Zeile i:

Subtrahiere $l_{ij} \cdot$ (Zeile j) von Zeile i $(j < i)$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Zeile } j \\ \\ \text{Zeile } i \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix} u_{11} & & & & \\ 0 & u_{22} & & & \\ \vdots & 0 & u_{jj} & \cdots & u_{jn} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & *_{ij} & & *_{in} \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \leftarrow \text{fertig (in U)} \\ \vdots \\ \leftarrow \text{fertig (in U)} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

passiert für $j = 1, 2, \ldots i-1$

Wie ändert sich Zeile i in jedem Schritt?

$$\begin{array}{lll} & \text{Zeile } i \text{ von } A & \text{(zu Beginn)} \\ - & l_{i1} \text{ (Zeile 1) von } U & \text{(Schritt 1)} \\ - & l_{i2} \text{ (Zeile 2) von } U & \text{(Schritt 2)} \\ & \vdots & \\ - & l_{i,i-1} \text{ (Zeile } i-1\text{) von } U & \text{(Schritt } i-1\text{)} \\ = & \text{Zeile } i \text{ von } U & \end{array}$$

Zeile i von A ist eine Kombination der ersten i Zeilen von U:

Matrix-Notion:

$$\text{Zeile } i \text{ von } A = \begin{bmatrix} l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,i-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} U$$

Das heisst:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & \\ & & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{L} U$$

L ist eine untere Dreiecksmatrix
U Obere Dreiecksmatrix

Vorher $\underset{\uparrow}{L^{-1}} A = U$

Produkt der Eliminationsmatrizen

$$L^{-1} A = U \qquad | \cdot L \text{ (von links)}$$

$$\underbrace{\underbrace{L \cdot L^{-1}}_{I} A}_{A} = LU$$

$A = LU$ geht so nicht, wenn es Zeilenvertauschungen gibt. Gibt es einen Fix?

Fakt: Vertauschen der Zeilen einer Matrix S vertauscht auch die Zeilen von SA in gleicher Weise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 & - \\ & \vdots & \\ - & w_m & - \end{bmatrix}}_{S} A = \underbrace{\begin{bmatrix} - & w_1 A & - \\ - & w_2 A & - \\ & \vdots & \\ - & w_m A & - \end{bmatrix}}_{SA}$$

Beispiel: vertausche Zeilen 1 und 2 in S

$$\underbrace{\begin{bmatrix} - & w_2 & - \\ - & w_1 & - \\ & \vdots & \\ - & w_m & - \end{bmatrix}}_{S'} A = \underbrace{\begin{bmatrix} - & w_2 A & - \\ - & w_1 A & - \\ & \vdots & \\ - & w_m A & - \end{bmatrix}}_{S'A}$$

Permutationsmatrix P: Umsortierung der Zeilen von I

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P}$$

PA : Umsortierung der Zeilen von $IA = A$
(Permutation)

Px : Permutation der Einträge von x
↑
Vektor

Wenn P und P' Permutationsmatrizen sind, dann auch PP' (zweifache Umsortierung ist auch nur eine Umsortierung)

Es gibt $n!$ Permutationsmatrizen ($n \times n$), weil es $n!$ Möglichkeiten gibt, n Dinge (Zeilen) anzuordnen.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

n	$n!$	Anordnungen
1	1	1
2	2	12, 21
3	6	123, 132, 213, 231, 312, 321
4	24	1234, 1243, ...

2.4.1 Die $PA = LU$ Zerlegung

Idee: mache alle Zeilenvertauschungen am Anfang $(A \to PA)$, danach kann ohne Zeilenvertauschungen weitergerechnet werden.

Notation: E_j : mache alle Eliminationsschritte in Kolonne j

$P_{k,l}$: vertausche Zeilen k, l

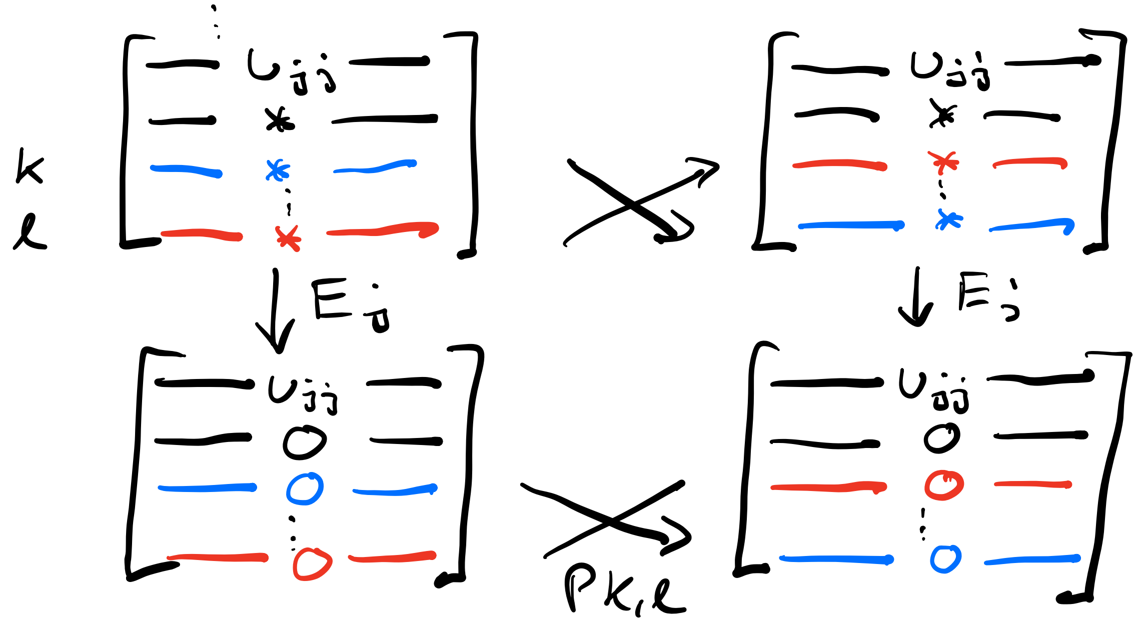
Beispiel (Elimination): bringe alle Vertauschungen Zug um Zug an den Anfang

$A \to U$			$PA = LU$
E_1	$P_{2,5}$	$P_{2,5}$	$P_{2,5}$
$P_{2,5}$	E_1	E_1	$P_{3,4}$
E_2	E_2	$P_{3,4}$	E_1
$P_{3,4}$	$P_{3,4}$	E_2	E_2
⋮			

Zug 1

Beh.: $\begin{matrix} E_j \\ P_{k,l} \end{matrix}$ hat den gleichen Effekt wie $\begin{matrix} P_{k,l} \\ E_j \end{matrix}$,

wenn $k, l > j$



2.4.2 Die Transponierte von A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Spiegelung an } \diagdown \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = A^T$$

Zeile i von A = kolonne i von A^T

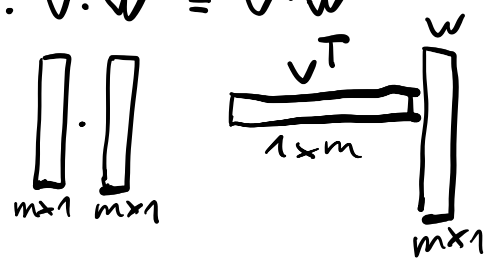
kolonne j von A = Zeile j von A^T

$$A_{ij} = (A^T)_{ji} \qquad (A^T)^T = A$$

$\uparrow$ Eintrag in Zeile i, kolonne j

$\uparrow$ Eintrag in Zeile j, kolonne i

Skalarprodukt: $v \cdot w = v^T w$



Die Transponierte von AB: $(AB)^T = B^T A^T$

Warum? $AB \leftarrow$ Spiegelung an $\diagdown \rightarrow B^T A^T$

Zeige: $(AB)_{ij} = (B^T A^T)_{ji}$ für alle i, j

$$\Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} — u_1 — \\ — u_2 — \\ \vdots \\ — u_m — \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{B} \Bigg)_{ij} \qquad \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} — v_1 — \\ — v_2 — \\ \vdots \\ — v_n — \end{bmatrix}}_{B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{A^T} \Bigg)_{ji}$$

$$u_i \cdot v_j = v_j \cdot u_i$$

Geht auch für mehrere Matrizen:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T.$$

Die Inverse der Transponierten:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \qquad \text{(Falls } A^T, A \text{ invertierbar)}$$

Beweis: $AA^{-1} = I$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T A^T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Transponierte} \\ \text{eines Produkts}}}{=} (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$$

D.h. $(A^{-1})^T$ ist die Inverse von A^T ✓

Permutationsmatrix: $P^{-1} = P^T$

Beweis

$$\underbrace{\begin{bmatrix} - p_1 - \\ - p_2 - \\ \vdots \\ - p_n - \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{P^T} \overset{\substack{\text{soll} \\ \downarrow}}{=} I$$

$$\text{Eintrag } (PP^T)_{ij} = p_i \cdot p_j = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$