2.4.3 Symmetrische Matrizen

S ist symmetrisch falls $S = S^T$ (so ein S muss quadratisch sein)

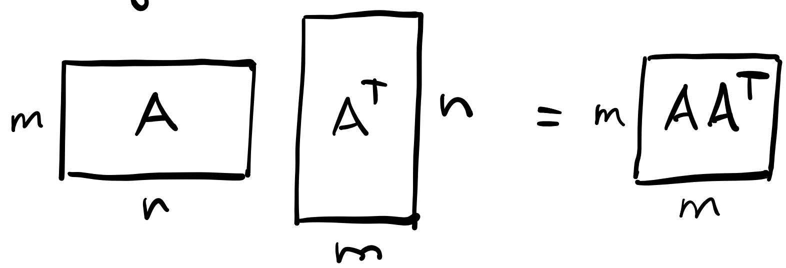
$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 7 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad S_{ij} = S_{ji} \text{ für alle } i,j$$

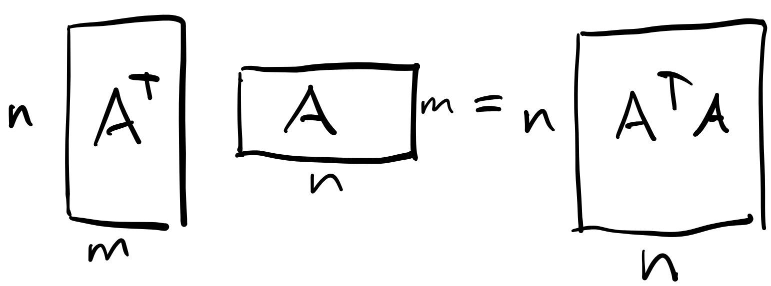
Wenn S symmetrisch ist, dann auch S^{-1}.

Beweis

$$(S^{-1})^T \underset{\text{letzte VL}}{=} \underbrace{(S^T)^{-1} = S^{-1}}_{S \text{ ist symmetrisch}} = S^{-1}$$

Für jede Matrix A sind A^TA und AA^T symmetrisch.





Symmetrie:

$$(A^TA)^T \underset{\text{letzte VL}}{=} A^T(A^T)^T \underset{\text{letzte VL}}{=} A^TA = A^TA$$

Beweis für AA^T analog.

2.4.4. Symmetrische LU-Zerlegung

kleines Beispiel (2x2)

$$\underbrace{E_{21}}_{L^{-1}} \overbrace{\begin{bmatrix}1&2\\2&6\end{bmatrix}}^{A} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}}_{U}$$

normaler Eliminationsschritt: subtrahiere 2·(Zeile 1) von Zeile 2

Mache einen Zusatzschritt: subtrahiere 2·(Kolonne 1) von Kolonne 2

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}}_{U} \underbrace{E_{21}^T}_{(L^{-1})^T} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}}_{D}$$

(i) $U = L^{-1}A \quad \xrightarrow[\text{mit } L \text{ von links}]{\text{Multiplikation}} \quad A = LU$

$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$D = L^{-1}A(L^T)^{-1} \qquad\qquad \boxed{A = L\cdot D\cdot L^T}$

$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$

(ii) $D = U\cdot(L^{-1})^T = U\cdot(L^T)^{-1} \quad \xrightarrow[\text{mit } L^T \text{ von rechts}]{\text{Multiplikation}} \quad U = DL^T$

[Einschub: Löse $Ax = b$

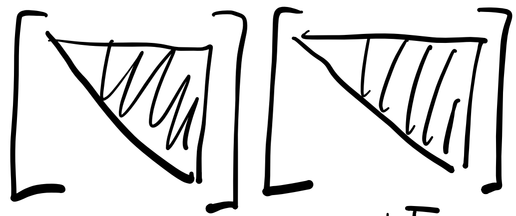
$\downarrow$

Löse $L\underbrace{DL^T}_{U}x = b$ (nicht einfacher)]

Allgemeiner Fall:

(i) $A =$ 

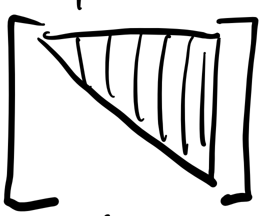
(Übungsaufgabe: Inverse einer unteren Dreiecksmatrix ist eine untere Dreiecksmatrix)

(ii)  $\overset{(i)}{=} L^{-1} A \left(L^{-1}\right)^T$

U $\quad$ $(L^{-1})^T$

(Übungsaufgabe: diese Matrix ist symmetrisch, wenn A symmetrisch ist.)

$\|$



(Übungsaufgabe: das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist eine obere Dreiecksmatrix)

Das heisst: $D = L^{-1} A \left(L^{-1}\right)^T$ ist eine symmetrische obere Dreiecksmatrix. Das geht nur, wenn D eine Diagonalmatrix ist!

Also: (wie vorher): $A = L\,D\,L^T$

$\uparrow$ Diagonalmatrix

Einschub: Eliminationsmatrix (für Zeilen)

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ l_{ij} & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \ldots$$

... für Kolonnen: $\ldots \cdot \begin{bmatrix} 1 & & l_{ij} \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

Kapitel 3 : Die vier Fundamentalen Unterräume

3.1 Vektorräume und Unterräume

Es gibt mehr Vektorräume als $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots \mathbb{R}^n$: Beispiele für Vektorräume

Konzept	Zahlentyp	Vektorraum
Dinge, die wir tun können mit ...	Zahlen: rechnen! $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, a/b	Vektoren: linear kombinieren! $v+w$, cv
Beispiele	$\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen) $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen) $\mathbb{Q}$ (rationalen Zahlen, Brüche) $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen) $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) $\{0,1\}$ (Bits)	$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{C}^3$ (Vektoren mit 3 komplexen Einträgen) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (2×2-Matrizen ($A+B$, $c \cdot A$ (1.3))) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) $\{0,1\}^n$ (Bitvektoren)

Meist, aber nicht immer, interessieren uns $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ und ihre <u>Unterräume</u>

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(cf)(x) = c \cdot f(x)$$

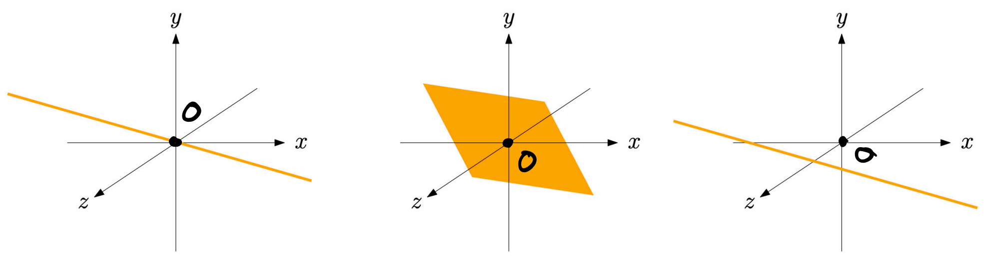
3.1.2 Unterräume von Vektorräumen

V: Vektorraum ; Unterraum : nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$, so dass Folgendes gilt:

wenn $v, w \in U$ und c ein Skalar, dann
(i) $v + w \in U$, (ii) $cv \in U$.
(insbesondere: $\underbrace{cv + dw}_{\text{Linearkombination}} \in U$ für c, d Skalare)

Jeder Unterraum enthält den Nullvektor:
nimm irgendein $v \in U$. Dann muss nach (ii)
auch $\underbrace{0 \cdot v}_{\mathbf{0}} \in U$ gelten.

kleinste Unterraum von V: $U = \{\mathbf{0}\}$
Grösster Unterraum von V: V selbst



Gerade durch 0: Unterraum von $\mathbb{R}^2$

Ebene durch 0: Unterraum von $\mathbb{R}^3$

Kein Unterraum (geht nicht durch 0)

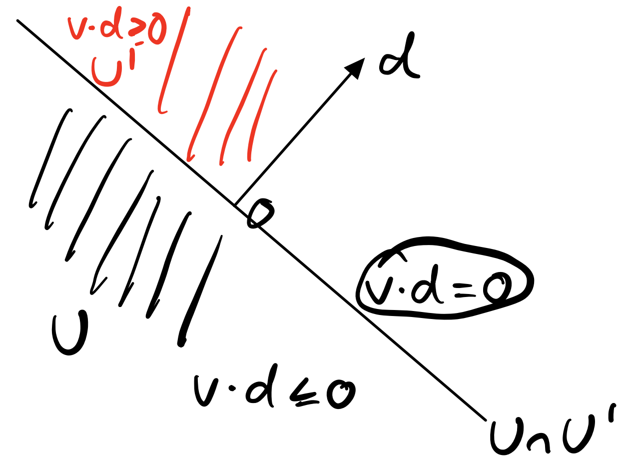
Ein Unterraum ist selbst wieder ein Vektorraum.

Zwei Unterräume von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

U_1: alle symmetrischen Matrizen $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$

U_2: alle Diagonalmatrizen $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

Clicker: $\{v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot d \leq 0\}$



$$U \cup U' = \mathbb{R}^2$$

3.1.3 Der Kolonnenraum von $C(A)$, A $m \times n$

$$C(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$$

ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$

Beweis: $v, w \in C(A)$, c Skalar.

$\Downarrow$

es gibt x und y so dass $v = Ax$, $w = Ay$

Das heisst: $v + w = Ax + Ay$

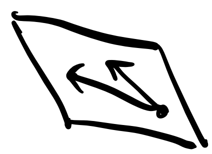
$$= A(\underbrace{x+y}_{\in \mathbb{R}^n}) \in C(A)$$

$$c \cdot v = c \cdot Ax$$

$$= A(\underbrace{c \cdot x}_{\in \mathbb{R}^n}) \in C(A).$$

3.1.4. Die Kolonnen von A spannen $C(A)$ auf

Spann, Basis	Beispiel
V: Vektorraum	$C(A)$
S: Folge von Vektoren in V	Die kolonnen von A
S spannt V auf, wenn V = alle kombinationen von S	Die kolonnen von A spannen $C(A)$ auf
S ist eine Basis von V, wenn S V aufspannt und S unabhängig ist	Die unabhängigen kolonnen von A (von links nach rechts) sind eine Basis von $C(A)$.

V	S abhängig	S unabhängig	
S spannt V auf			← Basis
S spannt V nicht auf