3.2 Berechnung des Nullraums einer Matrix durch Elimination: $A=CR$

Nullraum einer $m\times n$-Matrix A: alle Lösungen von $Ax=0$

$$N(A)=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax=0\} \quad (\text{Unterraum von } \mathbb{R}^n)$$

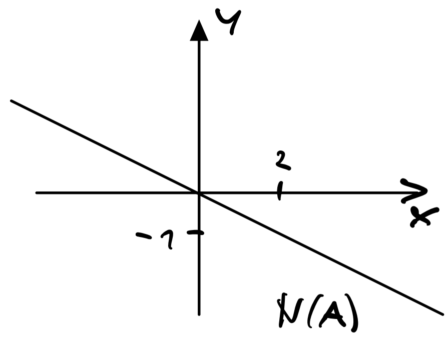
Wenn alle Kolonnen unabhängig sind: $N(A)=\{0\}$.

$N\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}}_{A}\Big)$: $\quad A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} x+2y&=0\\ 3x+6y&=0 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$x=-2y$$



Berechnung eines Unterraums: finde eine Basis!

Für $N(A)$ machen wir das, indem wir die Rangfaktorisierung $A=CR$ berechnen (1.4.2)

Rangfaktorisierung, abstraktes Beispiel:

$$A=\begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix} \longrightarrow C=\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_3 & v_6 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & 0 & r_{14} & r_{15} & 0 & r_{17} \\ & & 1 & r_{24} & r_{25} & 0 & r_{27} \\ & & & & & 1 & r_{37} \end{bmatrix}$$

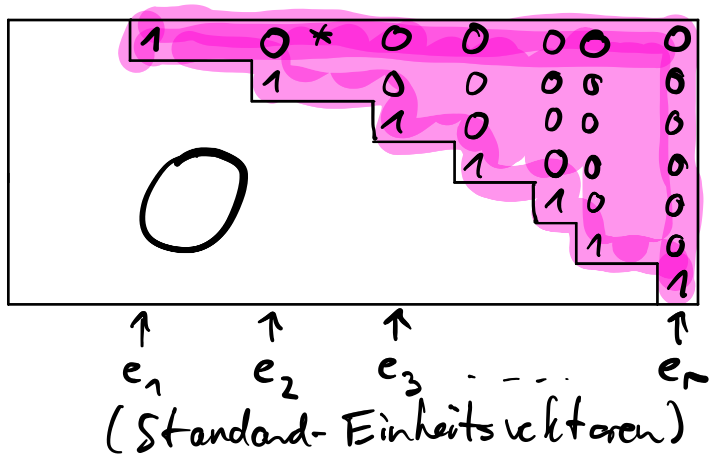
$v_7=r_{17}\cdot v_1+r_{27}\cdot v_3+r_{37}\cdot v_6$

$v_1=1\cdot v_1$ $\quad v_3=1\cdot v_3$ $\quad v_4=r_{14}\cdot v_1+r_{24}v_3$

$v_2=r_{12}\cdot v_1$

R: wie erhalte ich alle Kolonnen aus den unabhängigen?

R ist in <u>reduzierter Zeilenstufenform</u> (rref)



Plan: transformiere A zu R mittels Gauss-Jordan-Elimination. Auf dem Weg erhalten wir auch C

Da Zeilenoperationen Lösungen nicht verändern:
$Ax = 0 \Leftrightarrow Rx = 0$, d.h. $N(A) = N(R)$.
Lies eine Basis von $N(R)$ von R ab.

<u>Basis von N(R)</u>

Beispiel (1.4.2)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \Big| \; Rx = 0 \; ?$$

$$Rx = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = -F \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

„Freie Variablen"

$$
\begin{array}{c|c}
x & \text{Jede Lösung} \ldots \text{ ist eine Kombination zweier spezieller unabhängiger Lösungen} \\
\hline
\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} & -F\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}
\end{array}
= f_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ -F\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}} + f_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ -F\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}}
$$

die zwei unabhängigen Lösungen, spannen $N(R)$ auf.

Die beiden Lösungen bilden eine Basis von $N(R) = N(A)$!

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \quad R\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad R\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0
$$

unabhängig