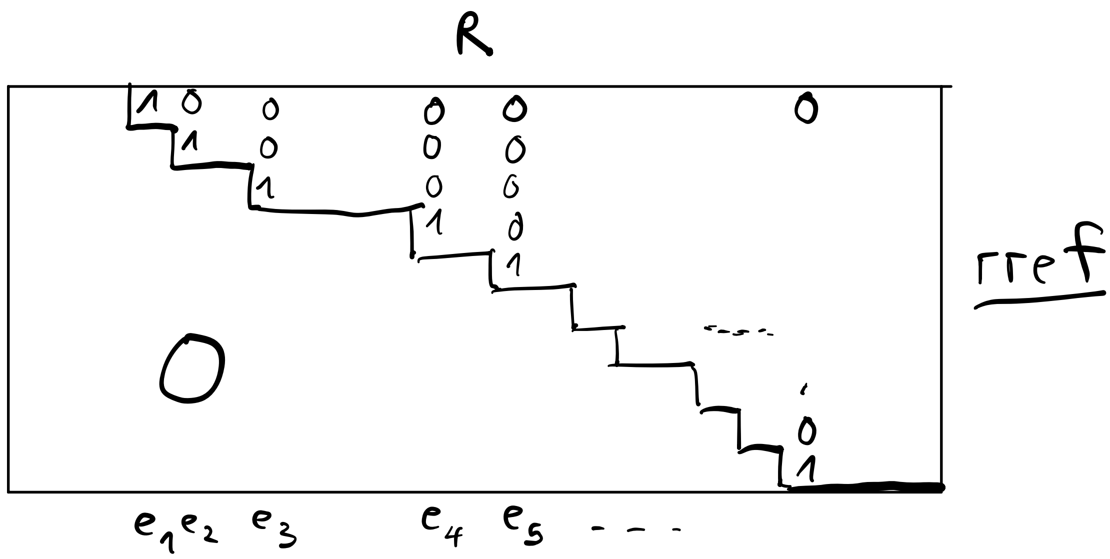


$N(R)$, R in rref

Beispiel (1.4.2) Nullraum: alle x : $Rx = 0$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Rx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$-F = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = -F \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Freie Variablen

Zwei spezielle Lösungen:

setze $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$ auf $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prüfe: $Rx = 0$ für diese beiden x !

$$
\begin{array}{c|l}
x & \text{Jede Lösung von } Rx=0 \ldots \quad \text{ist eine kombination der zwei unabhängigen speziellen Lösungen} \\
\hline
\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} & -F\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}
\end{array}
= x_2 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ -F\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ -F\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}
$$

Die speziellen Lösungen spannen $N(R)$ auf und sind unabhängig, d.h. sie bilden eine Basis.

Allgemeiner Fall: R ist $(r \times n)$, in rref

x_I : Vektor von Variablen für $e_1, e_2, \ldots, e_r$ in R

(im Beispiel: $x_I = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$)

x_F : Vektor der $n-r$ anderen Variablen

(im Beispiel: $x_F = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$)

$$
Rx = \underbrace{I x_I}_{x_I} + F x_F = 0 \iff x_I = -F x_F
$$

$n-r$ spezielle Lösungen:

setze x_F auf $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$

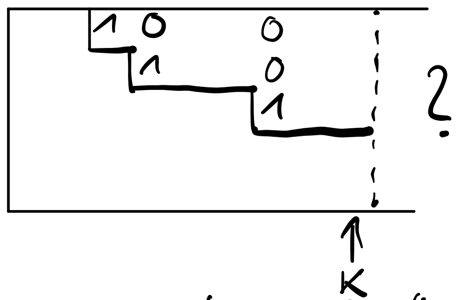
$$
\begin{array}{c|l}
x & \text{Jede Lösung von } Rx=0 \ldots \quad \text{ist eine kombination der } n-r \text{ speziellen unabhängigen Lösungen} \\
\hline
x_F & x_F \\
x_I & -Fx_F
\end{array}
= (x_F)_1 \begin{pmatrix} e_1 \\ -Fe_1 \end{pmatrix} + (x_F)_2 \begin{pmatrix} e_2 \\ -Fe_2 \end{pmatrix} + \ldots + (x_F)_{n-r} \begin{pmatrix} e_{n-r} \\ -Fe_{n-r} \end{pmatrix}
$$

Die speziellen Lösungen bilden eine Basis von $N(R)$.

3.2.1. Elimination Kolonne für Kolonne: $A \to R$.

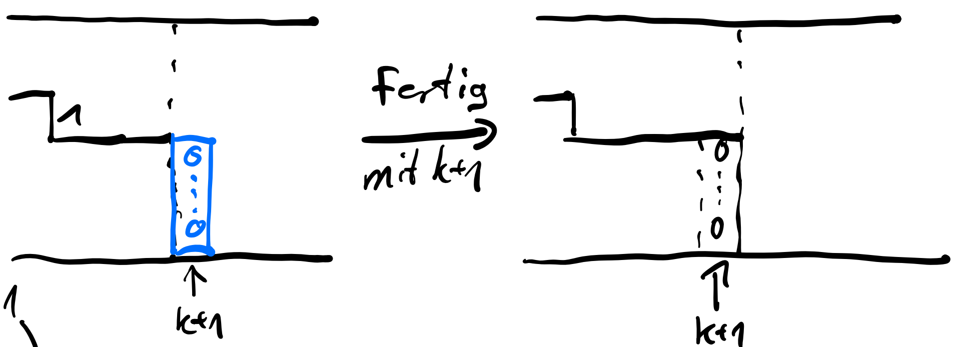
Für $k = 0, \dots, n-1$:

k Kolonnen fertig

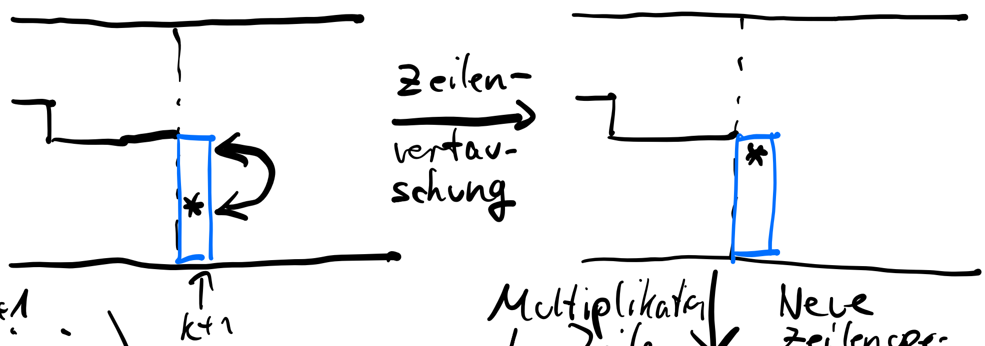


$\to$ $k+1$ Kolonnen fertig

Fall 1: Nur Nullen im blauen Bereich (Kolonne $k+1$ ist abhängig)

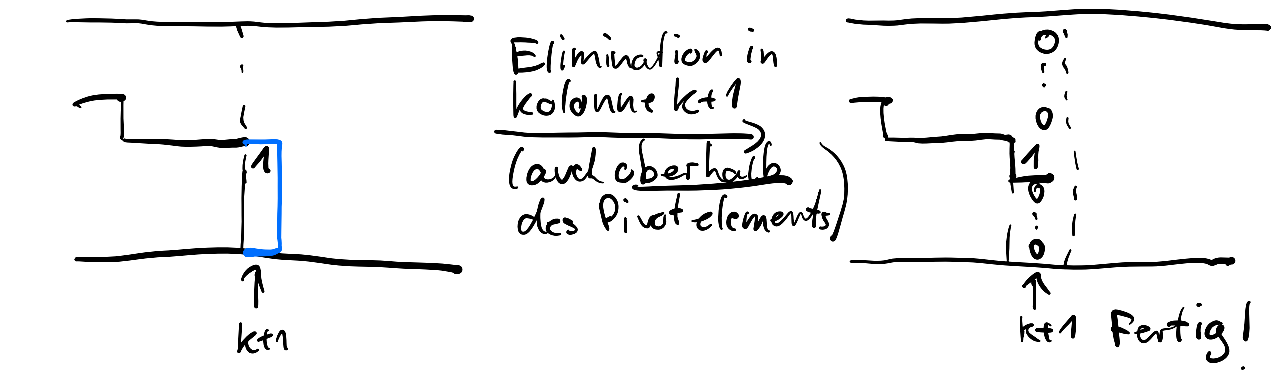


Fall 2: Mindestens ein $* \neq 0$ im blauen Bereich (Kolonne $k+1$ ist unabhängig)

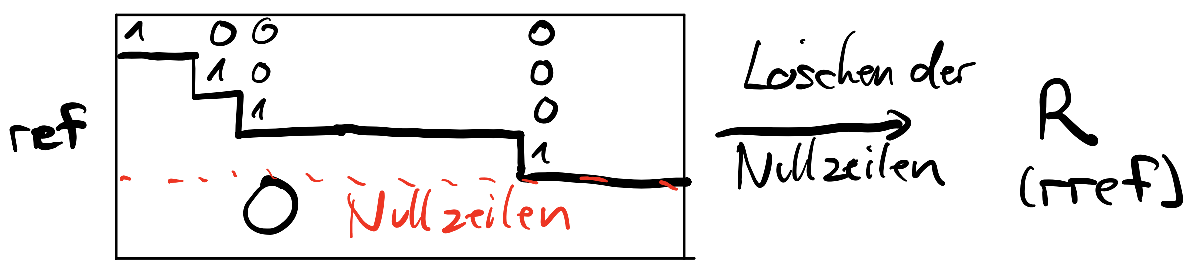


Multiplikation der Zeile mit $\frac{1}{*}$

Neue Zeilenoperation



Wenn alle kolonnen fertig sind: R_0



3.2.2 A=CR und der Nullraum

$A \to R_0 \to R$ ergibt das gleiche R wie in $A=CR$!

$$A=CR$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix} \longrightarrow R_0 = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | \\ e_1 & w_2 & e_2 & w_4 & w_5 & e_3 & w_7 \\ | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

$v_1 = 1 \cdot v_1 \qquad \boxed{v_4 = r_{14} v_1 + r_{24} v_3} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \boxed{w_4 = r_{14} e_1 + r_{24} e_2}$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & 0 & r_{14} & r_{15} & 0 & r_{17} \\ & & 1 & r_{24} & r_{25} & 0 & r_{27} \\ & & & & & 1 & r_{37} \end{bmatrix}$$

$$R_0 = \begin{array}{c} w_4 \\ \begin{bmatrix} r_{14} \\ r_{24} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Das Argument geht für jede kolonne, d.h.
$R = R_0$ ohne die Nullzeilen am Ende.

(*) gilt, weil $Ax = 0 \Leftrightarrow R_0 x = 0$ (Zeilenoperationen verändern Lösungen nicht (2.1.2), das haben wir auch benutzt, um $N(A) = N(R)$ zu argumentieren. $= N(R_0)$

Für das konkrete Argument brauchen wir ein spezielles x

$$x = \begin{bmatrix} r_{14} \\ 0 \\ r_{24} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \quad \begin{array}{ccc} Ax = 0 & \Leftrightarrow & v_4 = r_{14} \cdot v_1 + r_{24} \cdot v_3 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ R_0 x = 0 & \Leftrightarrow & w_4 = r_{14} \cdot e_1 + r_{24} \cdot e_2 \end{array}$$

3.3 Die vollständige Lösung von $Ax = b$

Wie in (2.1.2), wende Zeilenoperationen auch auf die rechte Seite an (b): $A \to R_0$, $b \to c$.

Lösungen ändern sich nicht: $Ax = b \Leftrightarrow R_0 x = c$.

$$R_0 x = c \quad : \quad \underbrace{\begin{bmatrix} Rx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{R_0 x} = \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}}_{c}$$

Falls ein $* \neq 0$: keine Lösung!

Andernfalls: löse $Rx = d$!