Kontext:

- Bisher können wir $Ax=b$ lösen, wenn A quadratisch und invertierbar ist (Gauss-Elimination, $A=LU$, $PA=LU$)
- Jetzt: löse <u>alle</u> Gleichungssysteme $Ax=b$
- Hilfsmittel: $A \to R_0 \to R$ (Gauss-Jordan Elimination) //
- Das erlaubt uns auch, $A=CR$ zu berechnen; in 1.4.2 haben wir diese Rang-Faktorisierung als Konzept eingeführt, hatten aber noch keine Berechnungsmethode.

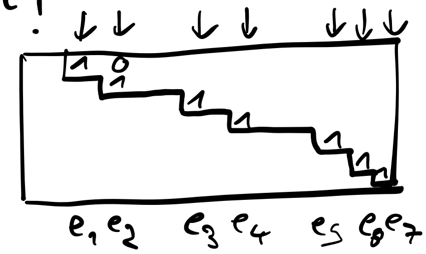
3.3 Die vollständige Lösung von $Ax=b$

Wie in (2.1.2), wende Zeilenoperationen auch auf die rechte Seite an (b): $A \to R_0$, $b \to c$.
Lösungen ändern sich nicht: $Ax=b \Leftrightarrow R_0x=c$.

$$R_0x=c \quad : \quad \underbrace{\begin{bmatrix} Rx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{R_0x} = \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}}_{c}$$

Falls ein $* \neq 0$: keine Lösung!
Andernfalls: löse $Rx=d$!

$$Rx = \underbrace{Ix_I}_{x_I} + Fx_F = d$$



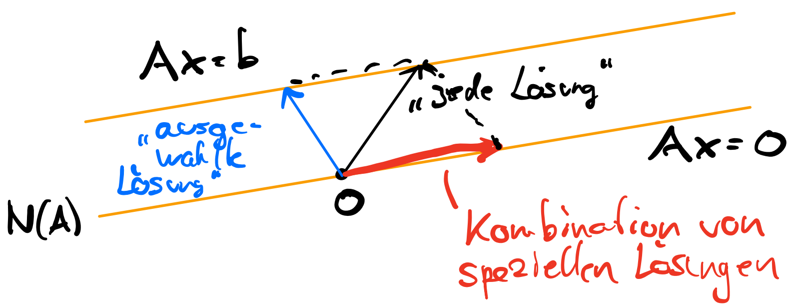
rref

$$\Leftrightarrow \quad x_I = d - Fx_F$$

Ausgewählte Lösung: setze x_F auf $0 \Rightarrow (x_I = d)$

x	Jede Lösung von $Rx = d$ ...	ist eine ausgewählte Lösung plus eine komb. der $n-r$ speziellen Lösungen
x_F	x_F	$= 0 + (x_F)_1 e_1 + \dots + (x_F)_{n-r} e_{n-r}$
x_I	$d - F x_F$	$= d + (x_F)_1 (-Fe_1) + \dots + (x_F)_{n-r} (-Fe_{n-r})$

$$\begin{pmatrix} x_F \\ d - Fx_F \end{pmatrix} = \underset{\uparrow \atop x_F = 0}{\begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}} + (x_F)_1 \underset{\uparrow \atop x_F = e_1}{\begin{pmatrix} e_1 \\ -Fe_1 \end{pmatrix}} + \dots + (x_F)_{n-r} \underset{\uparrow \atop x_F = e_{n-r}}{\begin{pmatrix} e_{n-r} \\ -Fe_{n-r} \end{pmatrix}}$$



3.3.1 Anzahl Lösungen von $Ax=b$

rang = Anzahl unabh. Kolonnen $= r$

$$\underset{\uparrow \atop m \times n}{Ax = b} \longrightarrow \underset{\uparrow \atop m \times n}{R_0 x = c} \longrightarrow \underset{\uparrow \atop r \times n}{Rx = d}$$

$r \leq n \Downarrow$ $r \leq \min(m,n)$ $\Uparrow$ $r \leq m$

Voller Rang: $r = \min(m,n)$

R_0	$r = n$ (voller Rang)	$r < n$ (abhängige Kolonnen)
$r = m$ (voller Rang)	invertierbar 1 Lösung	$R_0 = R$ $\leftarrow$ $n-r$ freie Variablen ∞ viele Lösungen
$r < m$ (Nullzeilen)	R Nullzeilen 0 oder 1 Lösung	R $\leftarrow$ $n-r$ freie Variablen Nullzeilen 0 oder ∞ viele Lösungen

Fall 1: alle $* = 0$

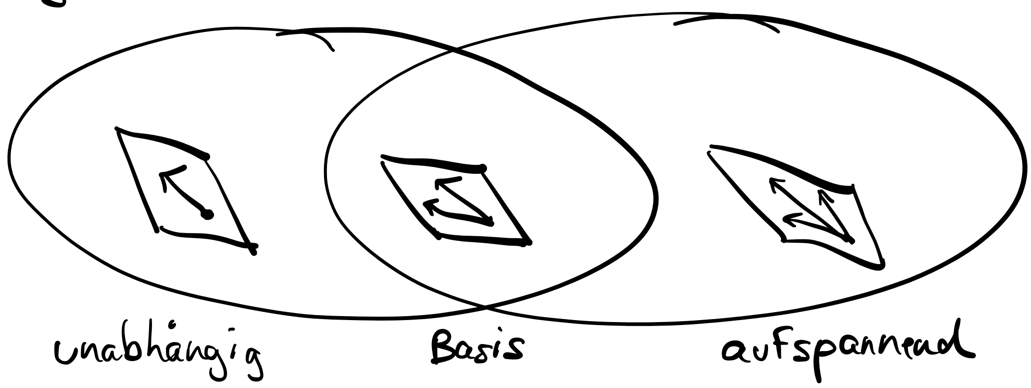
abhängig von c : $\begin{bmatrix} d \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}$

Fall 2: irgendein $* \neq 0$

3.4. Unabhängigkeit, Basis, Dimension

V : Vektorraum (könnte auch Unterraum eines anderen Vektorraums sein)

S : Folge von Vektoren in V



Beispiele:

- $e_1, e_2, \ldots e_n$ (Kolonnen der $n \times n$ Einheitsmatrix) bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$ (Standardbasis)
- Die Kolonnen einer invertierbaren $n \times n$-Matrix A bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$: sie sind unabhängig und spannen $\mathbb{R}^n$ auf. Warum? $Ax = b$ hat eine Lösung für jedes $b \in \mathbb{R}^n$. Das heisst, jedes $b \in \mathbb{R}^n$ ist eine Kombination der Kolonnen. (2.2.1)

Falls $v_1, v_2, \ldots v_n$ eine Basis von V ist, dann ist <u>jeder</u> Vektor $v \in V$ eine <u>eindeutige</u> Kombination von $v_1, v_2, \ldots v_n$

Beweis: Falls
$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \quad (*)$$
$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$$

Zu zeigen: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Aus (*) folgt (mit Subtraktion der beiden Gleichungen):

$$0 = \underbrace{(a_1 - b_1) v_1}_{= a_1 v_1 - b_1 v_1} + (a_2 - b_2) v_2 + \ldots + (a_n - b_n) v_n$$

Die v_i's sind unabhängig (Basis 1), d.h. 0 ist nur als triviale Kombination darstellbar $\Rightarrow a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \ldots = a_n - b_n = 0$

Also sind die beiden Kombinationen gleich.

$$\boxed{\text{Jede Basis von } V \text{ hat die gleiche Anzahl von Vektoren. Diese Anzahl ist die Dimension von } V.}$$

Beweis (durch Widerspruch):

Angenommen, es gibt eine Basis $v_1, v_2, \ldots v_m$ und eine grössere Basis $w_1, w_2, \ldots w_n$ $(n > m)$. Da eine Basis V aufspannt, ist jedes w_j eine Kombination der v_i's (weil diese eine Basis bilden).

$$w_j = * v_1 + * v_2 + \ldots + * v_m$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

Vektor x_j mit m Einträgen

Matrix-Notation:

$$\underbrace{[w_1, w_2, \ldots w_n]}_{B} = \underbrace{[v_1, v_2, \ldots v_m]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{X,\ m \times n}$$

$\text{Rang}(X) \leq \min(n, m) = m < n$, also hat X weniger als n unabhängige Kolonnen: alle Kolonnen zusammen sind abhängig. Das heisst, es gibt einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ so dass $Xc = 0$.

Dann gilt auch $Bc = (AX)c = A(\underbrace{Xc}_{0}) = A \cdot 0 = 0$

Also sind die kolonnen von B abhängig und deshalb <u>keine</u> Basis, Widerspruch!

Also muss die Annahme falsch gewesen sein, und es gibt eben doch keine zwei Basen unterschiedlicher Grösse.

3.4.1 Basen von Matrixräumen

Vektorraum	Basis	Dimension
$\mathbb{R}^n$	$e_1, e_2, \ldots, e_n$	n
alle 2x2 Matrizen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	$\underbrace{a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$	4
Diagonal-matrizen $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	2