3.4.1 Basen von (Matrix)räumen

Vektorraum	Basis	Dimension
$\mathbb{R}^n$	$e_1, e_2, \ldots, e_n$	n
alle 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Matrizen ($\mathbb{R}^{2\times 2}$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\underbrace{a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$	4
Diagonalmatrizen $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ (Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	2
Symmetrische Matrizen $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ (Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\underbrace{a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}}$	3
$\{0\}$	Basis: $\emptyset$ (leere Menge)	0

$\emptyset$ spannt $\{0\}$ auf, weil 0 eine Kombination der leeren Menge ist (die Kombination von keinen Vektoren ist 0).

Polynome	$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots$ - unabhängig: jeder „Vektor" (Basispolynom) hat seine „private" Potenz - aufspannend: jedes Polynom ist Kombination der Basispolynome.	∞

$$x^{1001} + 5x^{999} - 4x^{17} = 1 \cdot x^{1001} + 5 \cdot x^{999} - 4 \cdot x^{17}$$

Basiselemente

3.5 Dimensionen der vier Unterräume (heute)

A: $m \times n$-Matrix

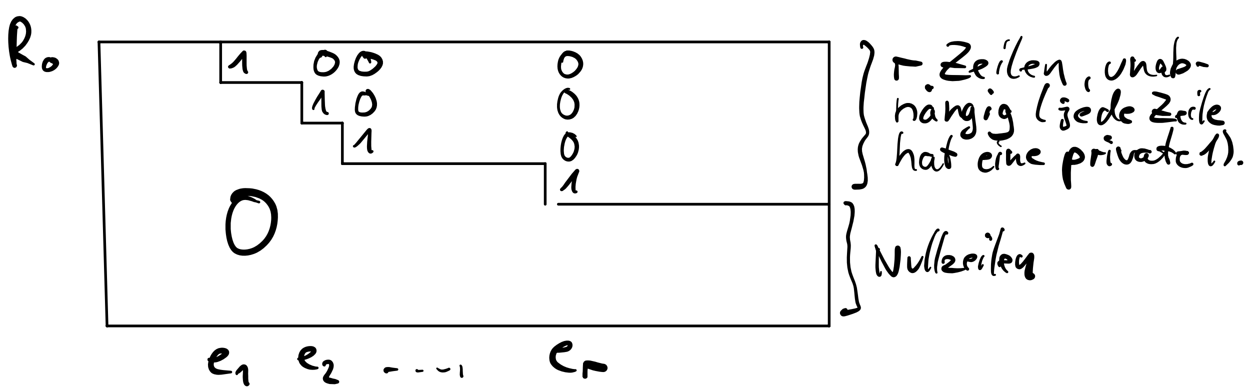
Unterraum	von	Definition	Dimension
$C(A)$	$\mathbb{R}^m$	Kombinationen der Kolonnen von A	$r = \text{Rang}(A)$
$R(A) = C(A^T)$	$\mathbb{R}^n$	Kombinationen der Zeilen von A = Kombinationen der Kolonnen von A^T	r
$N(A)$	$\mathbb{R}^n$	Lösungen von $Ax = 0$	$n-r$
$N(A^T)$	$\mathbb{R}^m$	Lösungen von $A^T y = 0$ („linker Nullraum“)	$m-r$

Zeilenraum $R(A) = C(A^T)$

Gauss-Jordan: $A \longrightarrow R_0$ mittels Zeilenoperationen:
- subtrahiere $c \cdot$ (Zeile i) von Zeile j
- vertausche Zeile i und Zeile j
- multipliziere Zeile i mit $c \neq 0$

Übungsaufgabe: Zeilenoperationen ändern den Zeilenraum nicht.

Das heisst, $R(A) = R(R_0)$



Die ersten r Zeilen spannen $R(R_0)$ auf (Nullzeilen irrelevant).
Die ersten r Zeilen von R_0 sind eine Basis von $R(R_0)$

und von $R(A) \Rightarrow \dim(R(A)) = r$.

Nun wissen wir: für jede Matrix A ist die Anzahl unabhängiger Zeilen = Anzahl unabhängiger Kolonnen! Für Rang-1-Matrizen haben wir das in (1.3.4) gesehen.

[Einschub: Kolonnenraum kann sich unter Zeilenvertauschungen ändern.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ („y-Achse")

$A' \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C(A') = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ („x-Achse")]

Nullraum N(A)

Gauss-Jordan: $A \to R_0 \to R$ (entferne die Nullzeilen)

Zeilenoperationen ändern Lösungen nicht (2.1.2):

$$Ax = 0 \Leftrightarrow R_0 x = 0 \Leftrightarrow Rx = 0$$

Also: $N(A) = N(R)$

Wir haben bereits eine Basis von $N(R)$ mit $n-r$ Vektoren gefunden (3.2).

Also: $\dim(N(A)) = \dim(N(R)) = n-r$.

Linker Nullraum $N(A^T)$

(wegen $A^T y = 0 \Leftrightarrow y^T A = 0^T$ „links von A")

Wie vorher gezeigt: für jede Matrix gilt:

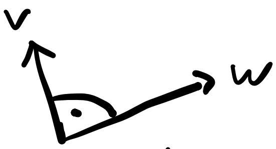
	dim (Nullraum)	= Anzahl Kolonnen	− Rang
A:	$n-r$	n	r
A^T:	$m-r$	m	r

$m-r = \dim(N(A^T))$

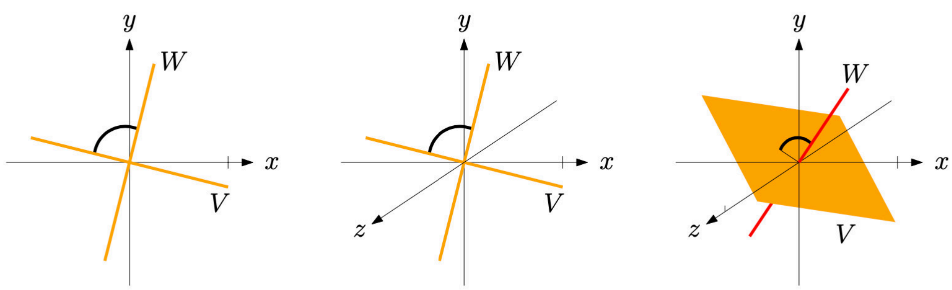
Kapitel 4: Orthogonalität

Zur Erinnerung (1.2.3, 2.4.2): $v, w \in \mathbb{R}^n$ sind orthogonal, falls $v \cdot w = 0 = v^T w$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v \cdot w} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0 = \underbrace{[4, 2]}_{v^T} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{w} \; (= [0])$$



Zwei Unterräume V und W von $\mathbb{R}^n$ heissen orthogonal, falls $v \cdot w = 0$ für <u>alle</u> $v \in V$ und <u>alle</u> $w \in W$.



$\mathbb{R}^2$ $\quad$ $\mathbb{R}^3$ $\quad$ $\mathbb{R}^3$

Wenn A eine $m \times n$-Matrix ist:

- $N(A)$ und $R(A) = C(A^T)$ sind orthogonal in $\mathbb{R}^n$
- $N(A^T)$ und $R(A^T) = C(A)$ sind orthogonal in $\mathbb{R}^m$

Beweis: $v \in N(A) \Leftrightarrow Av = 0$

$w \in R(A) = C(A^T) \Leftrightarrow A^T y = w$ für ein y.

$$v^T w = v^T (A^T y) = (v^T A^T) y = \underbrace{(\underset{0}{Av})^T}_{0^T} y = 0$$

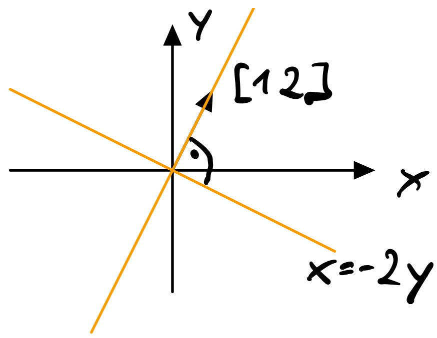
Argument für $N(A^T)$, $R(A^T)$ genauso, mit A^T statt A.

Beispiel: $R\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\right)$

Unterräume von $\mathbb{R}^2$

$N\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\right)$

(3.2): $x=-2y$



Übungsaufgabe: Wenn V und W orthogonal sind, dann gilt $V \cap W = \{0\}$.

Wenn V und W Unterräume von $\mathbb{R}^n$ sind und $V \cap W = \{0\}$, dann gilt: $\dim(V) + \dim(W) \leq n$.

Insbesondere, wenn V und W orthogonal sind, gilt $\dim(V) + \dim(W) \leq n$. (wegen Übungsaufgabe)

Dimensionsformel.

Beweis: