Übungsaufgabe: Wenn V und W orthogonal sind, dann gilt $V \cap W = \{0\}$.

$\boxed{\text{Wenn } V \text{ und } W \text{ Unterräume von } \mathbb{R}^n \text{ sind und } V \cap W = \{0\}, \text{ dann gilt: } \dim(V) + \dim(W) \le n.}$

Insbesondere, wenn V und W orthogonal sind, gilt $\dim(V) + \dim(W) \le n$. (wegen Übungsaufgabe)

Dimensionsformel.

Beweis:

Sei $k = \dim(V)$, $\ell = \dim(W)$, $v_1 \dots v_k$ eine Basis von V, $w_1, w_2 \dots w_\ell$ eine Basis von W. Wir wollen zeigen:

$v_1, \dots v_k, w_1, \dots w_\ell$ sind unabhängig. Daraus folgt dann $k + \ell \le n$, weil es in $\mathbb{R}^n$ höchstens n unabhängige Vektoren geben kann.

Wenn wir Vektoren $v_1, \dots v_N$ in $\mathbb{R}^n$ haben:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_N \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad n \times N. \quad 3.3.1:$$

$\operatorname{rang}(A) \le \min(n, N) \le n$. Das heisst, A hat höchstens n unabh. Kolonnen. Wenn $N > n$, dann ist $v_1 \dots v_N$ nicht unabhängig.

Angenommen,

$$\underbrace{\underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k}_{v \in V} + \underbrace{d_1 w_1 + \dots + d_\ell w_\ell}_{w \in W \Rightarrow -w \in W}} = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\in V}{v} = \underset{\in W}{-w} \in V \cap W$$

Wegen $V \cap W = \{0\}$ gilt $v = -w = 0$.

Das heisst:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k = v = 0$$
$$d_1 w_1 + d_2 w_2 + \ldots + d_\ell w_\ell = w = 0$$

Weil $v_1 \ldots v_k$ unabh. $\Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$

Weil $w_1 \ldots w_\ell$ unabh. $\Rightarrow d_1 = d_2 = \ldots = d_\ell = 0$

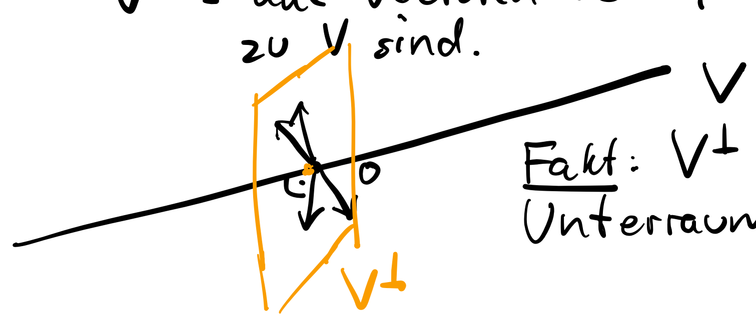
Das heisst, 0 ist nur als triviale Kombination von $v_1 \ldots v_k, w_1 \ldots w_\ell$ darstellbar, also sind diese Vektoren unabhängig.

4.1.1. Orthogonales Komplement $V^\perp$

V Unterraum von $\mathbb{R}^n$

Definition:
- $w \in \mathbb{R}^n$ ist orthogonal zu V wenn w orthogonal zu allen $v \in V$ („w steht senkrecht auf V")
- $V^\perp$ = alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^n$, die orthogonal zu V sind.

$\mathbb{R}^3$:



Fakt: $V^\perp$ ist ein Unterraum.

Seien V und W orthogonale Unterräume von $\mathbb{R}^n$.
Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

	Beispiel $V = N(A)$, $W = R(A) = C(A^T)$
(i) $W = V^\perp$	stimmt auch
(ii) $\dim(V) + \dim(W) = n$	stimmt: $(n-r) + r = n$
(iii) Jedes $u \in \mathbb{R}^n$ kann als $u = v + w$ geschrieben werden, mit eindeutigen $v \in V$, $w \in W$	stimmt auch

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii). Beobachtung: $w \in \mathbb{R}^n$ ist orthogonal zu $V \Leftrightarrow w$ ist orthogonal zu $v_1, \ldots v_k$: $\Leftrightarrow w \in N(A)$

Richtung „$\Leftarrow$"

$$\left[\begin{array}{l} w^T(\underbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k}_{v \in V}) \overset{\text{(Distributivität)}}{=} \\ c_1 \underbrace{w^T v_1}_{0} + c_2 \underbrace{w^T v_2}_{0} + \ldots + c_k \underbrace{w^T v_k}_{0} = 0 \end{array}\right]$$

Sei A die Matrix mit Zeilen $v_1, v_2, \ldots v_k$. Dann gilt $V = R(A) = C(A^T)$. Wegen der Beobachtung gilt: $W = N(A)$. Dann gilt:

$$\underbrace{\dim(\underbrace{R(A)}_{V})}_{r} + \underbrace{\dim(\underbrace{N(A)}_{W})}_{n-r} = n \quad (3.5)$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wie vorher gesehen, sind $v_1 \ldots v_k, w_1 \ldots w_l$ unabhängig. Da $k + l = n$ (ii), sind diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Also gilt $u = \underbrace{c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k}_{v} + \underbrace{d_1 w_1 + \ldots + d_l w_l}_{w}$

mit eindeutigen $c_1 \ldots c_k$ und $d_1 \ldots d_l$ (3.4).
$\Rightarrow$ eindeutige v und w ($u = v' + w'$ für andere v', w' würde zu anderen $c_1 \ldots c_k, d_1 \ldots d_l$ führen).

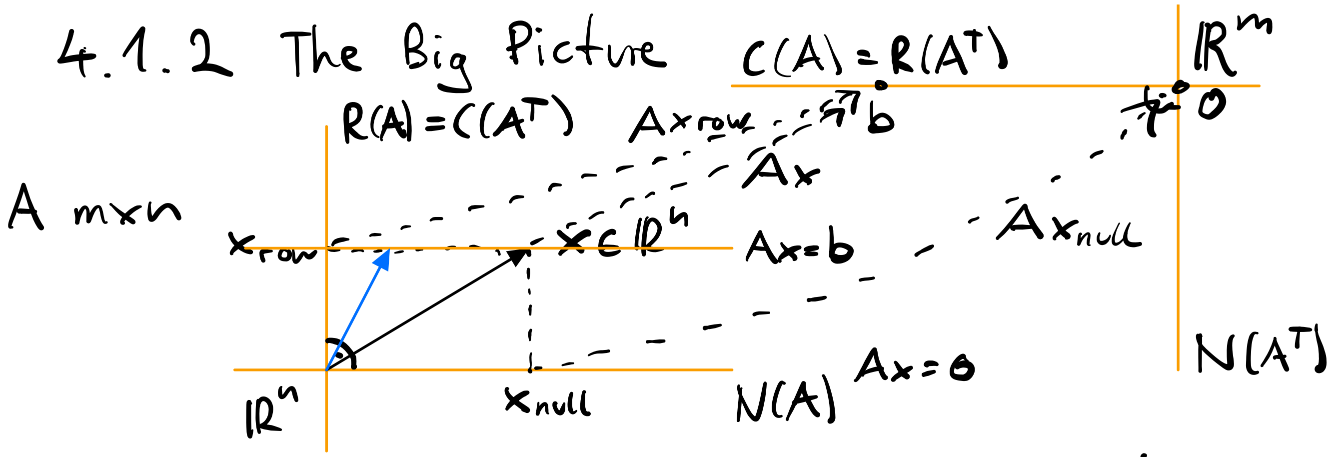
(iii) $\Rightarrow$ (i) Zu zeigen: W enthält alle Vektoren orthogonal zu V. Sei u orthogonal zu V. Wir können u als $v + w$ schreiben, mit $v \in V$, $w \in W$ (iii).

$$\Rightarrow \underbrace{v^T u}_{0\text{, weil } u \text{ orthogonal zu } V \text{ und } v \in V} = v^T(v+w) = v^T v + \overbrace{v^T w}^{0\text{, weil } V \text{ und } W \text{ orthogonal}} = v^T v$$

Also: $0 = v^T v = \|v\|^2 \Rightarrow v = 0$

Das heisst: $u = \underbrace{v}_{0} + w = w \in W$

4.1.2 The Big Picture



(4.1) $N(A)$ und $R(A)$ sind orthogonale Unterräume ...

(4.1.1.) ... und sogar orthogonale komplemente

(4.1) .. $N(A^T)$ und $R(A^T)$ genauso.

(4.1.1) $x \in \mathbb{R}^n$ kann geschrieben werden als

$$x = \underbrace{x_{row}}_{\in R(A)} + \underbrace{x_{null}}_{\in N(A)}$$

(4.1.1) Wenn $Ax = b$ ist, dann ist $Ax_{row} = b$ und $A x_{null} = 0$

(3.3) Lösungen von $Ax=b$ = ausgewählte Lösung von $Ax=b$ + Lösungen von $Ax=0$