

# **Lineare Algebra**

ETH Zürich, HS 2025, 401-0131-00L

## Willkommen und Einführung

Bernd Gärtner

17. September 2025

# Über uns



Bernd Gärtner (Dozent, erster Teil)  
Institut für Theoretische Informatik  
Departement Informatik



Robert Weismantel (Dozent, zweiter Teil)  
Institut für Operations Research  
Departement Mathematik

# Über uns



Stefan Kuhlmann (Chefassistent)  
Institut für Operations Research  
Departement Mathematik



Jonathan Schnell (Chefassistent)  
Institut für Operations Research  
Departement Mathematik

# Über uns: Die Assistierenden der Übungsgruppen

Valentin Gröner

Annika Guhl

Silvan Bolt

Simon Krause

Simon-Philipp Merz

Kim Tae

Clemens Sageder

Vanessa Skylarova

Moritz Schwalm

Théophile Thiery

Clemens Steinwendner

Stanislav Kostov

Hannah Schwede

Jing Ren

Mohamed-Hicham Leghettas

Niklas Weßbecher

Metehan Kılıç

Boris Gachevski

Manuel di Sabatino

Shuhao Li

Julian Weide

Benjamin Gruzman

Aviv Segall

Oleksandr Kulkov

Paul Cremer

Saleh Ashkboo

Mark Sosman

Falls noch nicht geschehen: Bitte per myStudies in eine Übungsgruppe einschreiben!  
Beachten Sie die Termine, Sprachen sowie Fokusgruppen!

Die Übungen beginnen diese Woche.

# Was ist Informatik?

Eine typische Unterhaltung:

*Sie sind ja Computer-Experte.*

*Nein, ich bin Informatiker.*

*Ach so . . .* 

# In der Informatik geht es nicht um Computer

Mike Fellows [Fel93]:

*Computer science is not about machines in the same way that astronomy is not about telescopes. There is an essential unity of mathematics and computer science.*

## Worum geht es dann?

Duden Informatik [CSB06], Wikipedia:

*Die Informatik ist die Wissenschaft von der systematischen Darstellung, Speicherung, Verarbeitung und Übertragung von Informationen, besonders der automatischen Verarbeitung mithilfe von Digitalrechnern.*

systematisch:	Mathematik	← Lineare Algebra, Diskrete Mathematik
Darstellung, Speicherung:	+ Datenstrukturen	
Verarbeitung:	+ Algorithmen	
automatisch:	+ Programmieren	
Digitalrechner:	+ Digitaltechnik	
		= Erstes Studienjahr

# Informatik und Mathematik

Mike Fellows [Fel93]:

*Computer science is not about machines in the same way that astronomy is not about telescopes. **There is an essential unity of mathematics and computer science.***

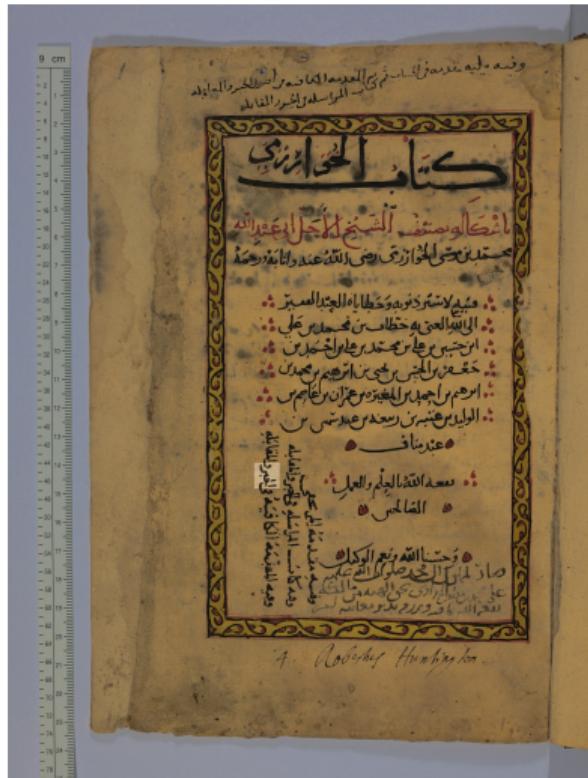
Schriftliche Addition . . .

$$\begin{array}{r} 123 \\ + 486 \\ \hline = 609 \end{array}$$

. . . ist ein Algorithmus zur systematischen Verarbeitung von Informationen, also auch Informatik!

Informatik ist ohne Mathematik nicht denkbar . . . und Mathematik (heutzutage) nicht ohne Informatik.

# (Lineare) Algebra: Die Ursprünge



*Das Buch von Al-Khwarizmi* ←

Namensgeber  
des Algorithmus

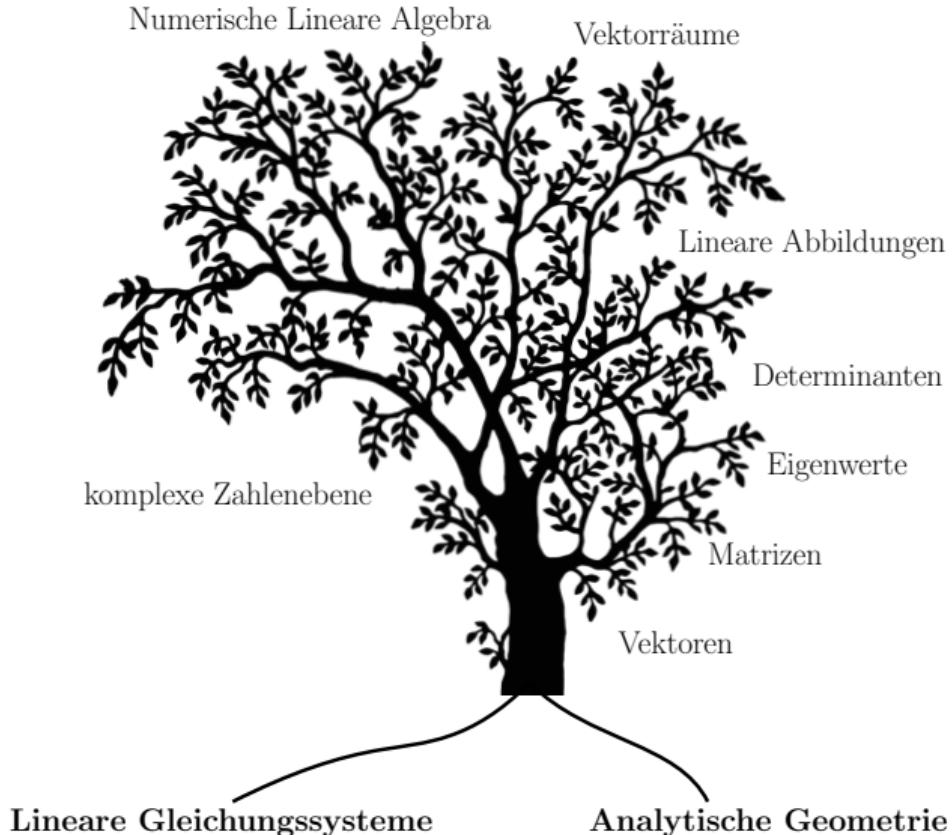
Einflussreiches Werk des persischen Universal-  
gelehrten Al-Khwarizmi (Arabisch, 9. Jahrhundert)

الجبر =

r      ÷      j      I      A

Vollständige Übersetzung der Titelseite

# Lineare Algebra: Inhaltliche Ursprünge und wichtige Entwicklungen



# Lineare Gleichungssysteme

*Dominik ist doppelt so alt wie Susanne und drei Jahre älter als Claudia. Zusammen sind die Kinder 17 Jahre alt. Wer ist wie alt?*

$$D = 2S$$

$$D = C + 3$$

$$D + S + C = 17$$

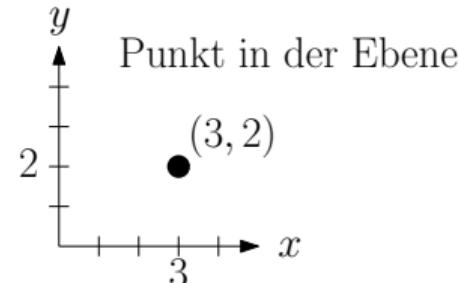
Drei Gleichungen in drei Variablen.

Allgemeiner Fall:  $m$  Gleichungen in  $n$  Variablen. (In der Praxis können  $m$  und  $n$  extrem gross sein.)

# Analytische Geometrie

“Rigorose” Geometrie (mit Formeln statt nur Anschauung).

- ▶ Beschreibung von geometrischen Objekten durch Koordinaten und Gleichungen



- ▶ Rechnen mit diesen Objekten zur Lösung geometrischer Probleme
  - ▶ Schneiden sich zwei Geraden im dreidimensionalen Raum?
  - ▶ Sind zwei Ebenen parallel?

# Vorlesung und Übungen

Webseite:

- ▶ <https://ti.inf.ethz.ch/ew/courses/LA25/index.html>
- ▶ Für Material und allgemeine Informationen

Moodle:

- ▶ <https://moodle-app2.let.ethz.ch/course/view.php?id=26165>
- ▶ Für Abgaben von Übungsaufgaben, Foren, Ankündigungen

Ablauf:

Woche	Vorlesung	Übungen
0		Mi Do oder Fr
1	Fr	Mi Do oder Fr
2	Fr	Mi Do oder Fr
:	:	:

# Übungs- und Bonusaufgaben

## Übungsserien (schriftlich):

- ▶ Ausgabe jeweils am Mittwoch (Webseite und Moodle)
- ▶ Bearbeitungszeit: eine Woche
- ▶ Eine der Aufgaben (auf der Serie markiert) wird bei Abgabe korrigiert.
- ▶ **Abgabe (via Moodle) ist freiwillig, aber empfohlen, um Feedback zu erhalten.**

## Bonusaufgaben:

- ▶ Aufschaltung jeweils am Mittwoch (Moodle)
- ▶ Bearbeitungszeit: eine Woche
- ▶ Online-Bonusaufgaben werden bei Abgabe automatisch korrigiert (drei Versuche)
- ▶ Viermal im Semester: *schriftliche* Bonusaufgabe
- ▶ **Abgabe (via Moodle) ist freiwillig, aber empfohlen, um Bonuspunkte zu erhalten.**

## Zusätzliche Übungsaufgaben (online):

- ▶ Wie die Online-Bonusaufgaben, aber beliebig viele Varianten und Versuche
- ▶ Zum Üben; keine Bonuspunkte

# Benutzung von KI

- ▶ Ihre Lernziele im Studium:
  - ▶ Übergeordnet: Erlernen von “informatischem” und “mathematischem” Denken.
  - ▶ Konkret: Verständnis der Konzepte, so dass Sie damit Probleme lösen können (im Studium Übungsaufgaben, später Aufgaben aus der Berufspraxis).
- ▶ Vorlesungen, Übungen und die Materialien dazu sind die relevantesten und verlässlichsten Quellen.
- ▶ Durch *eigenständiges* Erarbeiten der Konzepte erlernen sie informatisches und mathematisches Denken.
- ▶ Durch *eigenständiges* Lösen der Übungsaufgaben testen Sie Ihr Verständnis der Konzepte (bevor wir es in der Prüfung tun).
- ▶ Zusätzlich zu den Dozierenden und Assistierenden kann KI Sie als “personal trainer” dabei unterstützen (Beantworten gezielter Fragen, Erklären einzelner Schritte von Lösungsmethoden, Feedback zu Lösungsversuchen, . . . ).

**Faustregel:** Was Dozierende und Assistierende selbstverständlich und aus gutem Grund nicht machen (Ihnen Konzepte immer wieder vorkauen, Übungsaufgaben für Sie lösen), sollten Sie auch nicht von der KI verlangen!

# Clicker-Fragen

Multiple Choice Aufgaben, zur Bearbeitung während der Vorlesung (2-3 Minuten).

- ▶ Diskussion mit Banknachbarn erwünscht
- ▶ Zum Verständnis von vorher besprochenen Konzepten
- ▶ Beantwortung via ETH EduApp: <https://eduapp.ethz.ch>
- ▶ Auflösung mit Statistik über die angeklickten Antworten
- ▶ Teilnahme freiwillig

# Unterlagen auf der Vorlesungs-Webseite (gültig für den ersten Teil)

Skript  
(Englisch)

Lektionsplanungen mit  
Hyperlinks zum Skript:  
Edge, Firefox können es  
(Englisch)

Realität: Tablet-Notizen  
(Deutsch)

**Chapter 1**

## Vectors

### 1.1 Vectors and linear combinations

Vectors in  $\mathbb{R}^n$  and their linear combinations are fundamental in linear algebra and at the same time easy to understand. In fact, you may forget much of this material later on, but it will always be useful to have these important elements of mathematical thinking and writing. Most notably, you will see a first proof.

Vectors as you know them from highschool! "Vector" is 2-dimensional or 3-dimensional space. More abstractly, they live in some  $n$ -dimensional spaces, where  $n \in \mathbb{N}$ , the set  $\{1, 2, \dots\}$ . These spaces are sets that we can draw in 2D or 3D, these spaces are hard to visualize, but linear algebra can handle them as easily as  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$ .

Mathematically, these spaces are sets that are called  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$ , and  $\mathbb{R}^n$ , where  $\mathbb{R}$  is the set of real numbers, and  $n \in \mathbb{N}$ .  $\mathbb{R}^1$  is the  $x$ -axis, contains all triples  $(v_1)$  of real numbers, for example,  $(-2, 1)$ .  $\mathbb{R}^2$  contains all triples  $(v_1, v_2)$  of real numbers, for example,  $(-2, 1, 3)$ .  $\mathbb{R}^n$  contains all triples  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  of real numbers, for example,  $(-2, 1, 3, \dots, n)$ . The  $i$ -th number in the sequence is the  $i$ -th member in the sequence.

When we think of the elements of  $\mathbb{R}^1$  or  $\mathbb{R}^n$  as vectors, we typically draw them as arrows originating from the origin, with the tail at the origin and the head at the respective coordinates. We use column vector notation, indicating that we now think of a pair of numbers as a vector, see section 1.1. This is also used in computer notation, for example,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . In vector notation, we often drop lower case Latin letters such as  $v$  and  $w$ . You may have learned to write vectors as  $\vec{v}$ , but it is good to drop the arrowhead.

The zero vector corresponds to the origin and is written as 0, in every dimension. This is what mathematicians call an abuse of notation. The abuse here is that the meaning of 0 is not the same as zero has the other one. In these "linear algebra for computer scientists" notes, we don't write it.

10

Lecture plan  
Linear Algebra (40-4131-01, HS24), ETH Zürich  
Numbering of Sections, Definitions, Figures, etc. as in the Lecture Notes

### Week 0

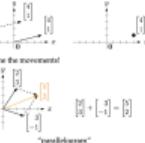
#### Vectors and linear combinations (Section 1.1)

A vector  $v$  (or  $\mathbf{v}$ ) is an element of  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  (natural numbers).

$\mathbb{R}^1$ :  
  
 $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^n$  (column vector):  
  
 $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

Drawing an arrow (movement) or point (location):  
  
 $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

Vector addition: Combine the movements!  
  
 $v + w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$

"parallelogram"

Definition 1.1: Let  
 $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . The vector  $v + w := \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  is the sum of  $v$  and  $w$ .

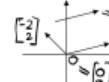
More vectors:  $u + v + w := (u + v) + w = u + (v + w)$ .

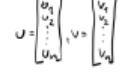
1

Kapitel 1

### 1.1. Vektoren und Linearkombinationen

Ein Vektor ist (momentan) ein Element von  $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2$ :  
  
 $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

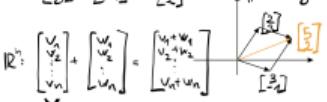
$\mathbb{R}^n$ :  
  
 $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}$ : reelle Zahlen  
 $n \in \mathbb{N}$ : natürliche Zahl  
 $0$ : Nullvektor

### 1.1.1 Vektor-Addition: $v + w$

„Kombinieren die Bewegungen“

$\mathbb{R}^2$ :  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

„Parallelogramm“  
  
 $\mathbb{R}^n$ :  
 $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}$

Mitschreiben ist nicht nötig! Fragen während der Vorlesung sind erwünscht!

## References

-  V. Claus, A. Schwill, and R. Böving.  
*Duden Informatik A - Z: Fachlexikon für Studium, Ausbildung und Beruf*, 4. Auflage.  
Dudenverlag, 2006.
-  Michael R. Fellows.  
Computer science and mathematics in the elementary schools.  
In Harvey B. Keynes Naomi Fisher and Philip D. Wagreich, editors,  
*Mathematicians and Education Reform 1990–1991*, volume 3 of *CBMS Issues in Mathematics Education*. American Mathematical Society, 1993.