Woche 7

Lineare Transformationen zwischen Vektorräumen

Def. 4.26 Seien V, W zwei Vektorräume. Eine Funktion $T: V \to W$ heisst lineare Transformation (zwischen Vektorräumen), wenn Linearität für alle $x_1, x_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$T(\underbrace{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}_{\in V \text{ (Lemma 4.16)}}) = \underbrace{\lambda_1 \underbrace{T(x_1)}_{\in W} + \lambda_2 \underbrace{T(x_2)}_{\in W}}_{\in W \text{ (Lemma 4.16)}}.$$

Bisher: $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$

Anderes Beispiel: Matrix „Flachdrücken"

$$V = \mathbb{R}^{2\times 2},\ W = \mathbb{R}^4,\ T: \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Das ist bijektiv (umkehrbar). Lemma 4.27 siehe Lecture Plan

Def. 4.2~~7~~8: Sei $T: V \to W$ lineare Transformation, bijektiv. Dann heissen V und W isomorph, und T ist Isomorphismus zwischen V und W.

Beispiele:

- $V = \mathbb{R}^{m\times n}$, $W = \mathbb{R}^{mn}$, T die Flachdrücktransformation
- V: Polynome von Grad ≤ 2, $W = \mathbb{R}^3$, $T: p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \to \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

Berechnung (von Basen) der fundamentalen Unterräume (4.3):

Spaltenraum $C(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, Zeilenraum $R(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, Nullraum $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Basiert auf $A \to R$ (Gauss-Jordan)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \to \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Spaltenraum:</u>

Theorem 4.31: Wenn R in RREF$(j_1, j_2, \dots, j_r)$, dann hat A die unabh. Spalten an Positionen $j_1, j_2, \dots j_r$, und diese Spalten bilden eine Basis von $C(A)$. Insbesondere gilt $\dim(C(A)) = \text{rang}(R) = r$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \to \quad R = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} j_1 & & j_2 & \\ \shortparallel & & \shortparallel & \\ 1 & & 3 & \end{array} \end{array}$$

Beweis: Unabh. Spalten = Basis von $C(A)$ (Lemma 4.19) und R gibt uns ihre Positionen in A (Theorem 3.18). Also $\dim(C(A)) = r$ (Def. 4.25) und $\text{rang}(A) = r$ (Def. 2.10)

Zeilenraum:

Theorem 4.32: Wenn R in RREF$(j_1, j_2, \dots j_r)$, dann bilden die ersten r Zeilen von R eine Basis von $R(A)$. Insbesondere gilt $\dim(R(A)) = r$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beweis: $R = MA$ mit M invertierbar (Theorem 3.17)

$\Rightarrow$ R und A haben den gleichen Zeilenraum (Lemma 3.5)

Die r Nichtnullzeilen von R spannen den Zeilenraum von R bereits auf und sind linear unabhängig (private Nichtnullen bei den Stufen). Also sind die ersten r Zeilen nach Def. eine Basis von $R(A)$ und $\dim(R(A)) = r$.

Theorem 4.33: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann gilt $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 \; \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

Beweis:

- $\operatorname{rang}(A) = \dim(C(A)) = r$ (Theorem 4.31)
- $\operatorname{rang}(A^T) = \dim(C(A^T)) = \dim(R(A)) = r$ (Theorem 4.32)

$R(A) := C(A^T)$.

Korollar 4.34. Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Rang r.

Dann gilt $r \leq \min(m,n)$.

Beweis: $r = \operatorname{rang}(A) \leq n$ (Anzahl Spalten)
$= \operatorname{rang}(A^T) \leq m$ (Anzahl Zeilen)

Nullraum:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow R' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Lemma 3.3 $N(A) = N(R)$ $(= N(R'))$

Dimension / Basis per Beispiel:

$x \in N(R') \Leftrightarrow R'x = 0$, und das kann so geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^r} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n-r}} = 0$$

Oder $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$\Rightarrow N(R')$ ist isomorph $\mathbb{R}^{n-r}$ und hat deshalb Dimension $n-r$ (Lemma 4.27)

$$T: \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\in N(R')} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n-r}}$$

ist eine bijektive lineare Transformation: zu jeder möglichen Ausgabe $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$ führt genau eine Eingabe

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \checkmark \\ x_3 \\ x_4 \checkmark \end{pmatrix}$ – die fehlenden Werte x_1, x_3 erhalten wir aus $(*)$

Basis von $N(A) = N(R')$: Eingaben, die zu den Ausgaben $e_1, e_2, \dots, e_{n-r}$ führen (Theorem 4.36)

Zusammenfassung:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & \mathbf{C}(A)\ (\dim = r) & & \mathbf{N}(A)\ (\dim = n-r) & & \mathbf{R}(A)\ (\dim = r) \\
 & & & & \overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}^{x_2,x_4} \quad \overbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}^{x_2,x_4} & & \\
\text{Bases:} & & \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} & & \overbrace{\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}}^{x_1,x_3} \quad \overbrace{\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}}^{x_2,x_3} \ x_1 & & \begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix} \\
 & & \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \\
\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}}_{C} & \leftarrow & \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&0&3\\2&4&1&4\\3&6&2&5\end{bmatrix}}_{A=CR'} & \rightarrow & \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{R \text{ in RREF}(1,3)} & \rightarrow & \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&0&1&-2\end{bmatrix}}_{R' \text{ in RREF}(1,3)} \\
 & & \text{Theorem 4.31} & & \text{Theorem 4.36} & & \text{Theorem 4.32}
\end{array}
$$

Alle Lösungen von $Ax = b$ (4.4)

Def. 4.37: Sei A $m \times n$ Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$. Die Menge $Sol(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Lösungsraum von $Ax = b$.

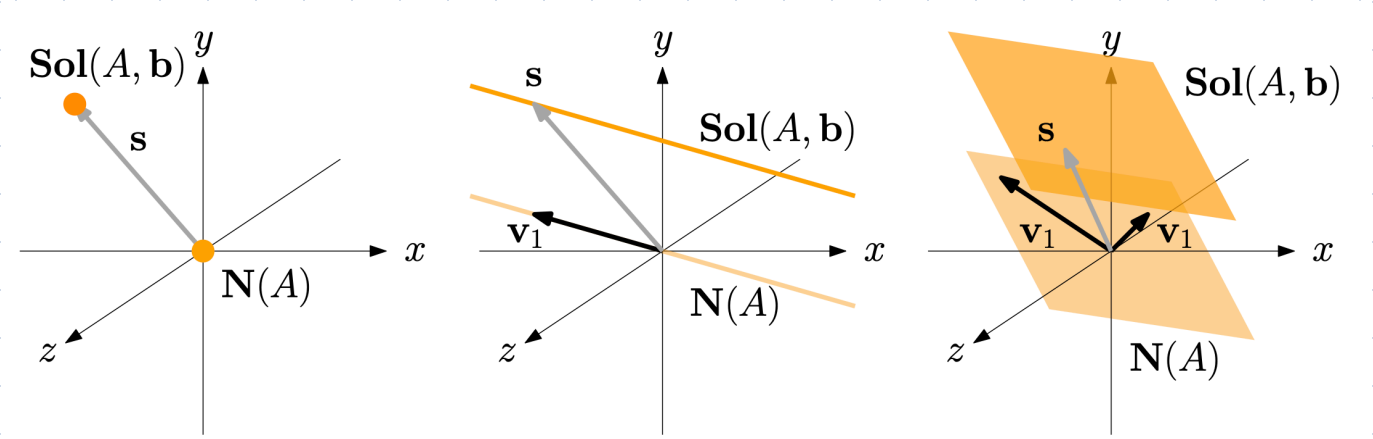
<u>kein</u> Unterraum, wenn $b \neq 0$, weil dann $0 \notin Sol(A, b)$ (siehe Lemma 4.9).

$Sol(A, 0) = N(A)$

$Sol(A,b) =$ „verschobener Nullraum".

Theorem 4.38: Sei s eine Lösung von $Ax=b$.

Dann gilt: $Sol(A,b) = \{s+x : x \in N(A)\}$



Beweis: (i) Für jedes $y \in Sol(A,b)$ gibt es $x \in N(A)$ mit $y = s+x$. Um das zu sehen:

$$y = s + \underbrace{(y-s)}_{x \in N(A)}$$

Dann: $Ax = A(y-s) = Ay - As = b - b = 0$

(ii) Für jeden Vektor $y = s+x$ mit $x \in N(A)$ gilt $y \in Sol(A,b)$. Um das zu sehen:

$$Ay = A(s+x) = As + Ax = b + 0 = b$$

Theorem 4.39: Sei A $m \times n$ Matrix von Rang r. Wenn $Ax=b$ eine Lösung hat, dann hat $Sol(A,b)$ Dimension $n-r$, wobei

$$\dim(Sol(A,b)) := \dim(N(A)).$$

Berechnung von $Sol(A,b)$: berechne irgendeine Lösung s (Gauss-Jordan, Theorem 3.20) und eine Basis $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-r}\}$ von $N(A)$ (Theorem 4.36). Dann:

$$Sol(A,b) = \left\{ s + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i \ : \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in [n-r] \right\}.$$