Prüfung "Erfüllbarkeit logischer Formeln"

28. Februar 2005, 14:00Uhr –16:00Uhr, RZ F21

Die maximal erreichbare Punktezahl ist für jede der folgenden sechs Aufgaben gleichgross. Lassen Sie sich genug Zeit. Um die Höchstnote zu erreichen müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Vor- und Nachnamen auf das erste Blatt und Ihre Initialien auf die folgenden Blätter zu schreiben.

Problem 1— Zeigen Sie:

1.1— Für eine 7-CNF Formel mit 15 Klauseln ist es immer möglich eine Belegung zu finden, die in jeder Klausel mindestens 2 Literale erfüllt.

1.2— $k \in \mathbf{N}$. Eine k-CNF Formel, in der jede Variable in höchstens $\frac{2^k}{4k}$ Klauseln auftritt (als positives oder negatives Literal), ist immer erfüllbar.

***

Problem 2— $m \in \mathbf{N}_0$. Gegeben sei eine 2-CNF Formel mit $3m$ Klauseln, davon m Klauseln mit zwei positiven Literalen und $2m$ Klauseln mit zwei negativen Literalen (es gibt keine 'gemischten' Klauseln).

Zeigen Sie, dass es möglich ist mindestens $\frac{7}{9}$ aller Klauseln zu erfüllen.

***

Problem 3— $n \in \mathbf{N}_0$.

3.1— Was ist die maximale Anzahl von Klauseln in einer erfüllbaren 3-CNF Formel über n Variablen?

3.2— Was ist die maximale Anzahl von Klauseln in einer 2-erfüllbaren (≤ 2)-CNF Formel über n Variablen?

3.3— Was ist die maximale Anzahl von Klauseln in einer (≤ 2)-CNF Formel über n Variablen, die von einer Belegung α und ihrem Komplement $x \mapsto 1 - \alpha(x)$ erfüllt werden kann?

***

Problem 4— Ein *eingeschränkter* 3-Falsifizierer F für eine Sprache L kann sich entweder nur *drei aufeinanderfolgende* Bits oder *höchstens zwei* beliebige Bits ansehen. Das heisst,

$$\Sigma^* \setminus L = \{w \mid \forall c \in \{0,1\}^* \exists S \subseteq \mathbf{N} : (S = \{i, i+1, i+2\}, i \in \mathbf{N}, \text{ oder } |S| \leq 2)$$

$$\text{und } F \text{ lehnt } \langle w, c_S, S \rangle \text{ ab}\} \; .$$

Sei $\mathcal{FP}'_3$ die Menge aller Sprachen, die einen polynomiellen eingeschränkten 3-Falsifizierer haben.

4.1 Zeigen Sie, dass 3-SAT $\in \mathcal{FP}'_3$.

4.2 Gilt $\mathcal{FP}'_3 = \mathcal{NP}$?

***

Problem 5— Gegeben sei eine 3-CNF Formel über n Variablen, mit einer Belegung α, die in jeder Klausel mindestens 2 Literale erfüllt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzeugt die Prozedur ppz() diese eine Belegung α? (Es geht also darum, genau diese Belegung α zu erzeugen, nicht irgendeine, die in jeder Klausel zwei Literale erfüllt.)

***

Problem 6— Sei F eine CNF Formel über Variablen Menge V ohne leere Klausel, und sei α eine gleichverteilt zufällige Belegung von V.

6.1 Was ist die erwartete Anzahl von Klauseln in F in denen durch α eine ungerade Anzahl von Literalen erfüllt wird?

6.2 Was ist die erwartete Anzahl von Klauseln in F in denen die Anzahl der durch α erfüllten Literale gleiche Parität hat wie die Grösse der jeweiligen Klausel? (Zwei Zahlen haben gleiche Parität, falls sie entweder beide gerade oder beide ungerade sind.)