Prüfung "Erfüllbarkeit logischer Formeln"

13. März 2006, 09:00Uhr – 11:00Uhr, HG D1.1

Die maximal erreichbare Punktezahl ist für jede der folgenden sechs Aufgaben gleich gross. Lassen Sie sich genug Zeit. Um die Höchstnote zu erreichen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Vergessen Sie bitte nicht Ihren Vor- und Nachnamen auf das erste Blatt und Ihre Initialen auf die folgenden Blätter zu schreiben.

Problem 1 — Man betrachte die CNF Formel

$$\Big\{\{x,\overline{y}\},\{x,y,z\},\{\overline{x},y,z\},\{\overline{y},\overline{z}\}\Big\}.$$

1.1 — Bestimmen Sie die erwartete Anzahl erfüllter Klauseln für eine Belegung zufällig gleichverteilt aus allen Belegungen von {x,y,z}.

1.2 — Bestimmen Sie die erwartete Anzahl erfüllter Klauseln, wenn für einen Parameter p, $0 \leq p \leq 1$, jede Variable den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit p annimmt (unabhängig).

1.3 — Welche Parameter p maximieren die erwartete Anzahl der erfüllten Klauseln in 1.2, welche p minimieren diese.

***

Problem 2 — Sei F eine unerfüllbare k-CNF Formel mit

$$\sum_{C \in F} 2^{-|C|} = 1.$$

2.1 — Zeigen Sie, dass F balanciert ist, d.h. jede Variable in F tritt gleich oft als positives wie als negatives Literal auf.

2.2 — Stimmt diese Aussage auch für $(\leq k)$-CNF Formeln?

***

Problem 3 — Man betrachte eine 4-CNF Formel über n Variablen, für die eine Belegung existiert, die in jeder Klausel mindestens zwei Literale erfüllt. Beginnend mit einer beliebigen Belegung lassen wir auf dieser Formel die random flip Prozedur `rf()` laufen, d.h. solange es eine unerfüllte Klausel gibt wählen wir eine solche, C, und ändern die aktuelle Belegung für eine gleichverteilt zufällige Variable aus $\mathrm{vbl}(C)$.
Zeigen Sie, dass die Prozedur in erwartet $O(n^2)$ Schritten eine erfüllende Belegung findet.

***

Problem 4 — SUDOKU ist ein Zahlenpuzzle. Das Spiel besteht aus einem quadratischen $n^2 \times n^2$-Gitterfeld, das in $n \times n$-Unterquadrate (Blöcke) eingeteilt ist. Jeder Block ist wieder in $n \times n$-Felder unterteilt.
Zu Beginn des Spiels sind in einigen Feldern bereits Zahlen aus $\{1, \dots, n^2\}$ eingetragen. Ziel des Spiels ist es, in die restlichen Felder jeweils eine Zahl aus $\{1, \dots, n^2\}$ zu schreiben, sodass jede Zahl genau einmal in jeder Zeile, jeder Spalte und jedem Block auftritt.

Die folgende Figur zeigt für $n = 2$ eine Startkonfiguration und das entsprechend vollständig ausgefüllte SUDOKU-Spielfeld.

3			
			2
		1	
	4		

3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4
1	4	2	3

4.1 — Drücken Sie die Bedingungen an ein SUDOKU (zunächst ohne die Startvorgabe) in einer CNF Formel aus.

Bemerkung: Es genügt ein Schema zu beschreiben, nach welchem die Klauseln generiert werden. Erklären Sie dabei die Bedeutung der Klauseln.

4.2 — Wie viele Variablen, Klauseln hat Ihre Formel?

4.3 — Wie kann man Startwerte auch berücksichtigen?

***

Problem 5 — Sei $\mathcal{FP}_{\text{arith3}}$ definiert wie die Klasse $\mathcal{FP}_3$ aus der Vorlesung, nur dass die Positionsmengen S auf Mengen der Form $\{i, i+j, i+2j\}$ (arithmetische Progressionen der Länge 3) für $i, j \in \mathbb{N}$ eingeschränkt sind.

Zeigen Sie 3-SAT $\in \mathcal{FP}_{\text{arith3}}$.

***

Problem 6 —
6.1 — Sei $k \in \mathbb{N}$. Wie viele $(2k+1)$-Klauseln über gegebenen n Variablen gibt es, in denen mehr positive als negative Literale vorkommen?

6.2 — Bestimmen Sie die grösstmögliche Anzahl von Klauseln einer 5-CNF Formel über n Variablen, welche eine Belegung erlaubt, die in jeder Klausel mindestens 3 Literale erfüllt.