Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

*Institut für Theoretische Informatik*
*Emo Welzl, Jiří Matoušek*

28.09.2004

# *Theoretische Informatik (Kernfach)* — *SS 2004 Prüfung*

**Kandidat/in:**

Name: ..........................................................................................

Vorname: ..........................................................................................

Stud.-Nr.: ..........................................................................................

---

Ich bezeuge mit meiner Unterschrift, dass ich die Prüfung unter regulären Bedingungen ablegen konnte und dass ich die untenstehenden allgemeinen Bemerkungen gelesen und verstanden habe.

Unterschrift: ..........................................................................................

---

**Allgemeine Bemerkungen und Hinweise:**

1. Überprüfen Sie die Vollständigkeit der ausgeteilten Prüfungsunterlagen (1 Deckblatt sowie 1 Aufgabenblatt mit insgesamt 6 Aufgaben).
2. Falls Sie während der Prüfung durch irgendeine Behinderung oder Störung beeinträchtigt werden, melden Sie dies sofort der Aufsichtsperson. Spätere Klagen werden nicht akzeptiert.
3. Keine Hilfmittel erlaubt.
4. Betrugsversuche führen zu sofortigem Ausschluss und können rechtliche Folgen haben.
5. Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch.
6. **Alle Antworten müssen für den Korrektor verständlich begründet werden. Schreiben Sie die wesentlichen Lösungsgedanken in klaren Sätzen oder Stichworten hin. Unverständliche oder nicht begründete Antworten werden nicht honoriert.**
7. Sie dürfen die 6 Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösen. Konzentrieren Sie sich jeweils auf eine Aufgabe, aber teilen Sie sich Ihre Zeit ein.
8. Nach Ablauf der Prüfungszeit verlassen Sie bitte den Raum, und lassen Sie nur die Blätter auf Ihrem Platz liegen, die zur Abgabe bestimmt sind. **Diese müssen alle mit Ihrem Namen beschriftet sein.**

Viel Glück!

| | Erreichte Punktzahl (maximal) | Visum |
|---|---|---|
| 1 | (6+6) | |
| 2 | (6+6) | |
| 3 | (6+6) | |
| 4 | (6+6) | |
| 5 | (12) | |
| 6 | (6+6) | |
| $\Sigma$ | (72) | |

## Aufgabe 1

(a) Gegeben seien rationale quadratische Matrizen $A, B$ und $C$. Beschreiben Sie den randomisierten Algorithmus aus der Vorlesung der mit hoher Wahrscheinlichkeit richtig entscheidet, ob $AB = C$ ist. Geben Sie eine Schranke für die Fehlerwahrscheinlichkeit des Algorithmus an. Die Korrektheit des Algorithmus muss nicht bewiesen werden.

(b) Seien $p(x), q(x)$ und $r(x)$ ganzzahlige Polynome in einer Variablen. Der folgende Algorithmus testet, ob $p(x)q(x) = r(x)$ ist: Sei $d$ der maximale Grad von $r(x)$. Wähle $d + 1$ ganze Zahlen $a_0, \dots, a_d$ und teste $p(a_i)q(a_i) = r(a_i)$. Sollte mindestens einer dieser Tests scheitern antworte mit „Nein“, sonst antworte mit „Ja“. Warum ist dieser Algorithmus korrekt? Wie kann man die Laufzeit verbessern, indem man den Algorithmus randomisiert und eine kleine Fehlerwahrscheinlichkeit erlaubt? Bestimmen Sie Laufzeit und Fehlerwahrscheinlichkeit des Algorithmus.

## Aufgabe 2

(a) Geben Sie vier Algorithmen zur Berechnung des maximalen Flusses in einem Netzwerk an. Beschreiben Sie diese kurz (schreiben Sie jeweils nicht mehr als vier Zeilen).

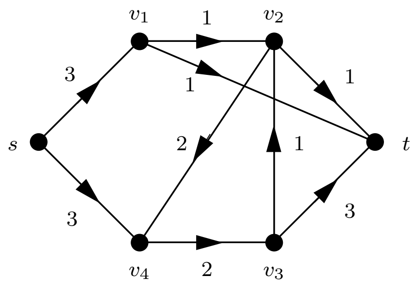
(b) Sei $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ eine 0/1-Matrix, sodass jede Zeile genau $r$ Einsen und jede Spalte genau $s$ Einsen enthält. (Insbesondere gilt $rm = sn$.) Seien $p < r$ und $q < s$ natürliche Zahlen mit $pm = qn$. Gesucht ist eine 0/1-Matrix $B = (b_{i,j})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Jede Zeile enthält $p$ Einsen.
- Jede Spalte enthält $q$ Einsen.
- $(b_{i,j} = 1) \Rightarrow (a_{i,j} = 1)$.

Beschreiben Sie ein Verfahren, das unter Zuhilfenahme von maximalen Flüssen in Netzwerken $B$ ermittelt

## Aufgabe 3

(a) Geben Sie ein lineares Programm an, dessen optimale Lösung einen maximalen Fluss für das folgende Netzwerk liefert (ein Korrektheitsbeweis ist nicht verlangt).




(b) Formulieren Sie das folgende Problem als lineares Programm :

Gegeben sind $n$ Punkte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$,..., $(x_n, y_n)$ in der Ebene. Finden Sie reelle Zahlen $a$ und $b$, sodass die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|$$

minimal ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aus geometrischer Sicht suchen wir die Gerade $y = ax + b$, die die durchschnittliche vertikale Distanz zu den gegebenen Punkten minimiert.
*Tipp:* Führen Sie weitere Variablen ein.

## Aufgabe 4

Lösen Sie die folgenden beiden Probleme unter Zuhilfenahme der Chernoff-Ungleichung für Zufallsvariablen, die die Werte $-1$ und $+1$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annehmen. (Als kleine Erinnerungsstütze: $e^{-t^2/2n}$.)

(a) Was sagt die Chernoff-Ungleichung (für die Summe von $\pm 1$-Variablen) über die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sequenz von 100 fairen Münzwürfen $\leq 30$ mal Kopf erscheint?

Wie lautet die exakte Formel für diese Wahrscheinlichkeit (ohne diese aufzulösen)?

(b) Betrachten Sie folgende Konstruktion für einen zufälligen Graphen $G$ mit $n$ Knoten:

Für jedes Knoten-Paar $\{u, v\}$ wirft man eine faire Münze. Falls Kopf erscheint wird $\{u, v\}$ eine Kante von $G$, andernfalls ist $\{u, v\}$ keine Kante von $G$. Beweisen Sie, dass es Konstanten $C$ und $n_0$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ die Wahrscheinlichkeit, dass $G$ einen Knoten mit Grad grösser als $\frac{n}{2} + C\sqrt{n \ln n}$ besitzt, höchstens 0.01 ist.

## Aufgabe 5

Gegeben sei eine Menge $P$ von $n$ Punkten in der Ebene, sodass keine zwei Punktepaaren den gleichen Abstand haben. Wir fügen Punkte von $P$ in zufälliger Reihenfolge zu einer anfangs leeren Menge $Q$ hinzu. Für $i = 2, \ldots, n$ bezeichne mit $(q_i, q_i')$ das Punktepaar, das nach der $i$-ten Einfügung unter allen Punktepaaren in $Q$ minimalen Abstand hat:

$$|q_i - q_i'| = \min_{\{s,t\} \in \binom{Q}{2}} |s - t|$$

Für $|Q| < 2$ ist das Punktepaar mit dem kleinsten Abstand nicht definiert.

Berechnen Sie die erwartete Anzahl unterschiedlicher Punktepaare mit kleinstem gegenseitigem Abstand die während des Prozesses entstehen. Mit anderen Worten, was ist $E[|\{\{q_i, q_i'\} : i = 2, \ldots, n\}|]$?

## Aufgabe 6

(a) Gegeben sei eine Menge $P$ von $n$ Punkten in der Ebene. Beschreiben Sie, wie mit Hilfe der Zwiebelstruktur die Frage nach der Anzahl der Punkte in $P$ unterhalb einer Geraden effizient beantwortet werden kann. Das Verfahren sollte nicht mehr als $O(n)$ Speicher benötigen und Zeitkomplexität $O((k + 1) \log n)$ ($k$ die Anzahl der ermittelten Punkte) beanspruchen.

(b) Beschreiben Sie die notwendigen Änderungen, um die Abfragezeit auf $O(k + \log n)$ zu verbessern und linearen Speicherplatzbedarf beizubehalten.