Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Informatik
Emo Welzl, Jiří Matoušek

13.05.2005

Theoretische Informatik (Kernfach) *SS 2005*
Semesterzwischenprüfung

Aufgabe 1

Linearität des Erwartungswerts, Indikatorvariablen

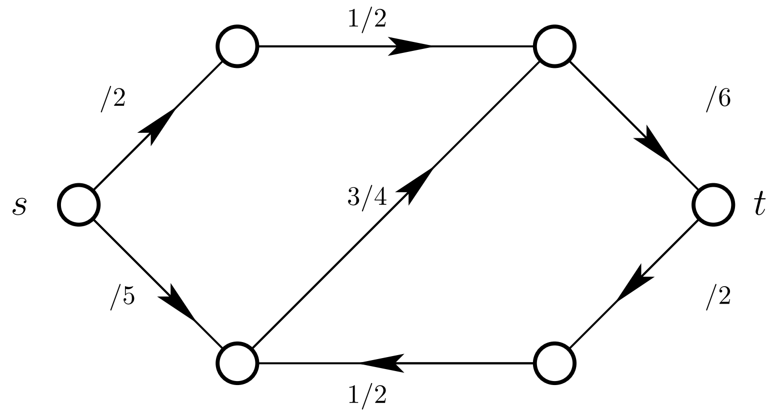
Sei $(a_1, a_2, ..., a_n)$ eine Permutation einer Menge von n Zahlen. Ein *aufsteigendes Tripel* ist eine Teilfolge $(a_i, a_{i+1}, a_{i+2}), i \in \{1..n-2\}$, mit $a_i < a_{i+1} < a_{i+2}$. Bestimmen Sie die erwartete Anzahl aufsteigender Tripel in einer gleichverteilt zufälligen Permutation einer Menge von n Zahlen (d.h. jede der $n!$ möglichen Permutationen hat gleiche Wahrscheinlichkeit).

Beispiel: In der Permutation $(9, 2, 4, 7, 8, 1, 3, 10)$ der Menge $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$ gibt es drei aufsteigende Tripel, die bei den Zahlen 2, 4, bzw. 1 beginnen.

Aufgabe 2

Max Flow, Grundlagen

Betrachten Sie folgenden gerichteten Graphen mit ausgezeichneten Knoten s (Quelle) und t (Senke). Kanten e sind mit $f(e)/c(e)$ (Fluss (Flow) der Kante e / Kapazität der Kante e) beschriftet.



Erweitern Sie wenn möglich die partielle Funktion $f(e)$ zu einem Fluss indem Sie die fehlenden Zahlen im Netzwerk eintragen. Was ist der Wert des entstehenden Flusses?

Aufgabe 3

Zufällige Suchbäume, Grundlagen

(i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Suchbaum (nach der Verteilung aus der Vorlesung) auf einer Menge von 15 Schlüsseln perfekt balanciert ist.

(ii) Gegeben sei ein zufälliger Suchbaum mit drei Knoten. Ermitteln Sie die erwartete Anzahl Knoten mit genau einem Kind (abermals nach der Verteilung aus der Vorlesung).

Aufgabe 4

Rekursionen für Erwartungswert

Sei $x_{n,d}, n, d \in \mathbf{N}_0$, die erwartete Anzahl der Knoten der Tiefe d in einem zufälligen Suchbaum für n Schlüssel (zufällig nach der Verteilung aus der Vorlesung). Bestimmen Sie eine Rekursion für $x_{n,d}$ (auf Grund derer sich für beliebige konkrete Werte n und d der Wert von $x_{n,d}$ bestimmen lässt). Sie müssen die Rekursion nicht auflösen und keine geschlossene Form für $x_{n,d}$ bestimmen.

Aufgabe 5

Treaps

Gegeben seien die folgenden 32 Schlüssel mit Prioritäten:

$(1, 0.34)$	$(2, 0.16)$	$(3, 0.94)$	$(4, 0.49)$
$(5, 0.17)$	$(6, 0.18)$	$(7, 0.63)$	$(8, 0.12)$
$(9, 0.27)$	$(10, 0.92)$	$(11, 0.84)$	$(12, 0.47)$
$(13, 0.51)$	$(14, 0.77)$	$(15, 0.69)$	$(16, 0.39)$
$(17, 0.96)$	$(18, 0.03)$	$(19, 0.22)$	$(20, 0.43)$
$(21, 0.37)$	$(22, 0.15)$	$(23, 0.99)$	$(24, 0.91)$
$(25, 0.31)$	$(26, 0.26)$	$(27, 0.85)$	$(28, 0.25)$
$(29, 0.11)$	$(30, 0.59)$	$(31, 0.71)$	$(32, 0.05)$

Sei T der zugehörige Treap.

(i) Enthält der linke oder der rechte Teilbaum der Wurzel von T mehr Elemente? Begründen Sie die Antwort.

(ii) Bestimmen Sie die Menge der Schlüssel der Knoten, die den Knoten mit Schlüssel 3 als Vorfahren haben. Begründen Sie die Antwort.

Aufgabe 6

Rückwärtsanalyse

Gegeben sei eine Punktemenge P bestehend aus n Punkten in der Ebene, wobei keine zwei Punktepaare gleichen Abstand haben. Wir fügen die Punkte aus P in zufälliger Reihenfolge (beginnend mit der leeren Menge) in die Ebene ein und interessieren uns für das Punktepaar mit dem jeweils grössten gegenseitigen Abstand der bislang eingefügten Punkte. Berechnen Sie die erwartete Anzahl unterschiedlicher grösster Abstände, die in diesem Prozess auftreten. (Ist eine Menge leer oder hat nur einen Punkt, so werden grösste Abstände mit $-\infty$ definiert.)

Aufgabe 7

Point Location, Fractional Cascading

(i) Definieren Sie das k-Niveau (k-level) in einem Arrangement von n Geraden.

(ii) Beschreiben Sie mit Hilfe von k-Niveaus ein deterministisches Verfahren, mit welchem die Frage nach der Anzahl Geraden oberhalb eines Abfrage-Punktes effizient beantwortet werden kann. Das Verfahren sollte nicht mehr als $O(n^2)$ Speicher benötigen und Zeitkomplexität höchstens $O((\log n)^2)$ haben.

(iii) Beschreiben Sie die notwendigen Änderungen um die Abfragezeit auf $O(\log n)$ zu verbessern und quadratischen Speicherplatz beizubehalten.